KREUZPOLARISATIONSEIGENSCHAFTEN VON HOHLLEITUNGSSTRAHLERN

DISSERTATION

zur
Erlangung des Grades eines
Doktor-Ingenieurs
der
Abteilung für Elektrotechnik
an der Ruhr-Universität Bochum

von
Volker Hombach
Freudenberg

Bochum 1981

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544708_0014

KREUZPOLARISATIONSEIGENSCHAFTEN VON HOHLLEITUNGSSTRAHLERN

DISSERTATION

zur
Erlangung des Grades eines
Doktor-Ingenieurs
der
Abteilung für Elektrotechnik
an der Ruhr-Universität Bochum

von
Volker Hombach
Freudenberg

Bochum 1981

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Dissertation eingereicht am: 14.01.1981

Tag der mündlichen Prüfung: 16.02.1981

Referent: Prof. Dr. Hans Severin

Korreferent: Prof. Dr. Siegfried Blume

Seite

Verzeichnis häufig verwendeter Formelzeichen V

1. Einleitung 1

2. Theoretische Untersuchung von kreuzpolarisationsfreien Strahlungsquellen 3

2.1 Definition der Kreuzpolarisation 3

2.2 Kreuzpolarisationseigenschaften von Quellenverteilungen 5
2.2.1 Die Huygens-Quelle 5
2.2.2 Die Strahlergruppe aus Huygens-Quellen 7
2.2.3 Die flächenhafte Quellenverteilung 8

2.3 Merkmale eines kreuzpolarisationsfreien Strahlungsfeldes 13

3. Berechnung der Aperturverteilung und des Strahlungsfeldes von Hohlleitungsstrahlern 15

3.1 Das Kirchhoff-Huygenssche Prinzip 15

3.2 Kirchhoffsche Näherungsverfahren 20

3.3 Integralgleichungsverfahren 24
3.3.1 Lösung des Zwei-Raum-Problems mit Hilfe der Momentenmethode 24
3.3.2 Berechnung der Admittanzmatrix für einen Halbraum 28
3.3.3 Berechnung der Admittanzmatrix für eine Hohlleitung 30
3.3.4 Berechnung der Admittanzmatrix für einen beliebig begrenzten Raum 32
3.3.5 Lösung des Drei-Raum-Problems mit Hilfe der Momentenmethode 38
3.3.6 Überlegungen zur Genauigkeit der Momentenlösung 45

4. Die Kreuzpolarisation im Strahlungsfeld spezieller Hohlleitungsstrahler 50

4.1 Allgemeine Vorbemerkungen 50

4.2 Die Öffnung im unendlich ausgedehnten ebenen Schirm idealer Leitfähigkeit 51

4.3 Die kreisförmige Hohlleitungsöffnung im unendlich ausgedehnten ebenen Schirm idealer Leitfähigkeit 62

4.4 Die quadratische Hohlleitungsöffnung im unendlich ausgedehnten ebenen Schirm idealer Leitfähigkeit 75

4.5 Der Rundhohlleitungsstrahler mit endlicher Wandstärke 85

4.6 Der Rundhohlleitungsstrahler mit speziell geformtem Rand 91

4.7 Der Rundhohlleitungsstrahler mit einem durch zwei Wellentypen bestimmten Aperturfeld 97

4.8 Der Rundhohlleitungsstrahler mit dielektrischem Einsatz 99

5. Zusammenfassung 109

6. Anhang 110

7. Literaturverzeichnis 131

Verzeichnis häufig verwendeter Formelzeichen

a	Radius der Rundhohlleitung, halbe Kantenlänge der Rechteckhohlleitung
A_{qi}	Entwicklungskoeffizienten
b	Außenradius eines Rundhohlleitungsrohres, halbe Kantenlänge der Rechteckhohlleitung
B_{mn}, B_{mi}	Normierungsfaktoren für Hohlleitungswellen
B_{qi}	Entwicklungskoeffizienten
$b_{\mu i}(\rho)$, $b_{\mu i \ell}$, $B_{\mu i}(\vartheta)$	Entwicklungskoeffizienten im Zusammenhang mit einer Fourier-Bessel-Reihe
C	dimensionslose Konstante, die das Verhältnis der elektrischen und magnetischen Flächenströme einer ebenen Quellenverteilung kennzeichnet
$\vec{C}_q$	Entwicklungsfunktionen der kombinierten Quellenverteilung
C_∞	Konditionszahl, die auf die Unendlichkeitsnorm zurückgeht
d	Riefentiefe
$D(\xi)$	Dreiecksfunktion
$\vec{e}_i$, $\vec{e}_{mi}$, $\vec{e}_{mn}$	normierte transversale elektrische Feldverteilung von Hohlleitungswellen
$\vec{E}$	Vektorphasor der elektrischen Feldstärke
$\vec{E}_e$, $\vec{E}_m$, $\vec{E}_g$	Vektorphasoren der elektrischen Fernfelder eines elektrischen Dipols, eines magnetischen Dipols und einer Kombination aus beiden
$\vec{E}_{e1}$, $\vec{E}_{e2}$	Vektorphasoren des Fernfeldes bei elliptischer Polarisation
$\vec{E}_{\ell 1}$, $\vec{E}_{\ell 2}$	Vektorphasoren des Fernfeldes bei linearer Polarisation
E_{max}	maximale elektrische Feldstärke im Strahlungsdiagramm
E_E, E_H	Funktionen die den Verlauf des Fernfeldes in E- und H-Ebene beschreiben
E_{Kp}	elektrisches Feld der Kreuzpolarisation
E_{Ref}	elektrisches Feld der Referenzpolarisation

E_o, E_{oe}, E_{om}, E_{on}	Amplituden des elektrischen Feldes
$E_1(\rho)$, $E_2(\rho)$	Funktionen, die den Verlauf des elektrischen Feldes in einer kreisförmigen Öffnung auf y- und x-Achse beschreiben
ϵ	Einheitsdyade
f	Frequenz
$f(\vartheta,\varphi)$	Fernfeldfunktion
F	Integrationsfläche, Hüllfläche
F_o	endlich große ebene Fläche
F_e	unendlich ausgedehnte ebene Fläche
F_1, F_2, F_A	Öffnungsflächen
F_3, F_4, F_B	Berandungsflächen
$g(\vartheta,\varphi)$	Fernfeldfunktion
G_o	Greensche Funktion des freien Raumes
G_1, G_2	Greensche Funktionen zur Dirichlet- und Neumannbedingung
$\vec{H}$	Vektorphasor des magnetischen Feldes
$\vec{H}^i$	Vektorphasor des magnetischen Feldes der einfallenden Welle
I_ν, $I_{\nu,\ell}$	Entwicklungskoeffizienten der elektrischen Flächenstromdichte
j	imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$
$\vec{J}$, $\vec{J}_\nu$	Vektorphasor der elektrischen Flächenstromdichte
J_i, J_i'	Besselfunktion der Ordnung i und ihre Ableitung nach dem Argument
$\vec{J}_\ell$, $\vec{J}_{\nu,\ell}$	Entwicklungsfunktionen der elektrischen Flächenstromdichte
$\vec{J}^i$	eingeprägte elektrische Quelle
k	Wellenzahl
$\vec{M}$, $\vec{M}_\nu$	Vektorphasor der magnetischen Flächenstromdichte
$\vec{M}_q$, $\vec{M}_{\nu,q}$	Entwicklungsfunktionen der magnetischen Flächenstromdichte
$\vec{M}^i$	eingeprägte magnetische Quelle
$\vec{p}$, $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$	Polarisationseinheitsvektoren
$P(\xi)$	Pulsfunktion

$\vec{r}$	Ortsvektor
r_o	Reflexionsfaktor in der Apertur
R, R_n	Abstand zwischen Quellpunkt und Aufpunkt
$u(\vec{r})$	komplexe Potentialfunktion
$\vec{u}$	Einheitsvektor
$\vec{u}_{p1}$, $\vec{u}_{p2}$	orthogonale Polarisationseinheitsvektoren nach der "Ludwig-3-Definition"
$\vec{u}^e_{p1}$, $\vec{u}^e_{p2}$	orthogonale Polarisationseinheitsvektoren für elliptische Polarisation
$\vec{U}_p$, $\vec{U}_{\mu,p}$	Gewichtsfunktionen
V	Volumen, das von der Hüllfläche F eingeschlossen wird
V_q, $V_{\nu,q}$	Entwicklungskoeffizienten der magnetischen Flächenstromdichte
$\vec{W}_p$, $\vec{W}_{\mu,p}$	Gewichtsfunktionen
X_q	Entwicklungskoeffizienten der kombinierten Quellengleichung
X_σ	normierte maximale Kreuzpolarisation
Y_A	Aperturadmittanz
Y_i, Y_{mi}, Y_{mn}	Feldwellenadmittanzen von Hohlleitungswellen
Z	Feldwellenwiderstand
β_{mn}	Phasenkonstante einer Hohlleitungswelle
Γ_o, Γ_1, Γ_2	Greensche Dyaden
$\delta(\vec{r} - \vec{r}')$	Diracsche Deltafunktion
$\vec{\delta}$	kleiner Abstandsvektor
ε_o	Dielektrizitätszahl des freien Raumes
ε_r	relative Dielektrizitätszahl
λ	Wellenlänge
μ_o	Permeabilität des freien Raumes
μ_r	relative Permeabilität
$\vec{\Pi}_e$, $\vec{\Pi}_m$	Vektorphasoren des elektrischen und magnetischen Vektorpotentials
ω	Kreisfrequenz

Indizes

$( )^{C}$, $( )^{X}$	Matrizen, die im Zusammenhang mit der kombinierten Quellengleichung auftreten
$( )^{e}$	Größe zugehörig zur einfallenden Welle
$( )^{E}$, $( )^{H}$	Größe zugehörig zu einer E- oder H-Welle
$( )^{Hl}$	Matrix oder Matrixelement zugehörig zu einer Hohlleitung
$( )^{HR}$	Matrix oder Matrixelement zugehörig zu einem Halbraum
$( )_{ER}$, $( )_{HR}$, $( )_{EHR}$	Größen berechnet nach den Verfahren ER, HR, EHR
$( )_{tan}$	Tangentialkomponente
$( )_{tr}$	Transversalkomponente
$( )_{\bigcirc}$	Matrix im Zusammenhang mit einer kreisförmigen Öffnung
$( )_{\square}$	Matrix im Zusammenhang mit einer rechteckigen Öffnung
$( )_{I}$, $( )_{II}$, $( )_{III}$	Größen, die in Raum I, II oder III gelten
$( )^{I}$, $( )^{II}$, $( )^{III}$	Matrizen, die für den Raum I, II oder III gelten
$( )^{*}$	konjugiert komplex
$(\tilde{})$	transponiert

Koordinatensysteme

(x,y,z)	kartesisches Koordinatensystem
(r,ϑ,φ)	Kugelkoordinatensystem
(ρ,φ,z)	Zylinderkoordinatensystem
(t,φ)	Koordinatensystem zur Beschreibung der Oberfläche eines rotationssymmetrischen Körpers

Aufpunktsysteme werden durch ungestrichene Koordinaten, Flächenelemente und Differentialoperatoren, Quellsysteme durch gestrichene Größen gekennzeichnet.

Matrizen werden durch Fettdruck gekennzeichnet, z. B. $\mathbf{T}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$.

Als Zeitabhängigkeit wird $e^{j\omega t}$ vorausgesetzt.

1. Einleitung

In den letzten Jahren haben die Polarisationseigenschaften elektromagnetischer Wellen in der Radartechnik, der Radioastronomie und der Nachrichtenübertragungstechnik zunehmende Bedeutung gewonnen. Einerseits nutzt man bei Streu- und Beugungserscheinungen von Objekten die auftretenden unterschiedlichen Polarisationszustände aus, um Aussagen über das Objekt selbst zu machen [1, 2], andererseits versucht man, bei Antennen durch die Entkopplung orthogonal polarisierter elektromagnetischer Wellen die Doppelausnutzung des zur Verfügung stehenden beschränkten Frequenzbandes zu ermöglichen (z. B. [3]). Die bei Abstrahlungs- und Streuprozessen orthogonal zur Haupt- oder Referenzpolarisation auftretende Polarisation bezeichnet man als Kreuzpolarisation. Diese kann durch das Antennensystem selbst, durch Anisotropie oder Inhomogenität des Übertragungsmediums (z. B. Niederschlag bei terrestrischen Richtfunkverbindungen [4]) oder durch Beugungs- und Streueffekte hervorgerufen werden.

Will man die Polarisationseigenschaften elektromagnetischer Wellen technisch ausnutzen, so benötigt man Antennensysteme, die die gewünschte Polarisationsart in den ganzen umgebenden Raum oder in einen bestimmten Raumbereich abstrahlen. Das Auftreten von Kreuzpolarisation kann verschiedene unerwünschte Auswirkungen haben, z. B.:

- Die Abstrahlung von Kreuzpolarisation bewirkt immer einen, wenn auch meist relativ geringen, Energieverlust, der den Wirkungsgrad der Antenne verschlechtert [5].
- Setzt man in der Radartechnik zur Regen-Clutter-Unterdrückung zirkulare Polarisation ein, so führt abgestrahlte Kreuzpolarisation zu einer Fehlauswertung von Rückstreusignalen [6].
- Bei Doppelausnutzung von Frequenzbändern, die man z. B. in der Satellitenübertragungstechnik anstrebt, ruft die Kreuzpolarisation ein Übersprechen zwischen den orthogonal polarisierten Kanälen gleicher Frequenz hervor (z. B. [7]).

Im Frequenzbereich $f > 1$ GHz sind die Antennensysteme meist Reflektor- oder Gruppenantennen. Ihre Eigenschaften hängen daher wesentlich von den verwendeten Erregern oder Einzelstrahlern ab. Diese müssen kreuzpolarisationsarm sein, wenn die Antenne ein kreuzpolarisationsarmes Strahlungsfeld erzeugen soll. Es gibt zwar schaltungstechnische Möglichkeiten, Referenz- und Kreuzpolarisation zu

trennen [8 - 11]; diese erfordern jedoch meist einen großen technischen Aufwand und sind zudem nur schmalbandig einzusetzen.

In dieser Arbeit werden die Strahlungseigenschaften verschiedener Hohlleitungsstrahler, wie sie in Reflektor- und Gruppenantennen eingesetzt werden, rechnerisch und experimentell untersucht und daraus Vorschläge zur Minimierung der unerwünschten Kreuzpolarisation abgeleitet. Dabei werden im zweiten Kapitel zunächst allgemeine Beziehungen für die Kreuzpolarisation im Strahlungsfeld von Quellenverteilungen aufgezeigt. Im dritten Kapitel sind sodann unterschiedliche Berechnungsverfahren zur Behandlung von Hohlleitungsstrahlern dargestellt, wobei der Schwerpunkt auf einem Integralgleichungsverfahren liegt, das vielseitig einsetzbar ist und Ergebnisse liefert, die eine zuverlässige Aussage über Kreuzpolarisationsverhalten zulassen. Im vierten Kapitel werden schließlich die Strahlungs- und insbesondere die Kreuzpolarisationseigenschaften verschiedener Hohlleitungsstrahler exakt berechnet und mit den Ergebnissen von Näherungsverfahren sowie Messungen verglichen.

2. Theoretische Untersuchung von kreuzpolarisationsfreien Strahlungsquellen

2.1 Definition der Kreuzpolarisation

Um Antennen bezüglich ihrer Kreuzpolarisationseigenschaften charakterisieren zu können, benötigt man zunächst eine mathematisch faßbare Definition der Kreuzpolarisation. Nach dem IEEE-Standard [12] ist Kreuzpolarisation "die Polarisation orthogonal zu einer Referenzpolarisation". Zur praktischen Anwendung müssen die Begriffe "Referenzpolarisation" und "orthogonale Polarisation" näher spezifiziert werden. Beschränkt man sich auf das Fernfeld einer Antenne, so liegt dort lokal ein Feld wie bei einer homogenen ebenen Welle vor. Sein Polarisationszustand läßt sich mit Hilfe des Polarisationseinheitsvektors $\vec{p}$ durch

$$\vec{E}_{tr} = \vec{p}\,|\vec{E}_{tr}|, \quad |\vec{p}| = 1$$

beschreiben, wobei $\vec{E}_{tr}$ für den komplexen transversalen Feldstärkevektor des elektrischen Feldes ("Vektorphasor") steht. $\vec{p}$ läßt sich als Punkt auf der Oberfläche der Poincaréschen Kugel [13] veranschaulichen. Sind zwei Polarisationen orthogonal zueinander, so gilt die Beziehung

$$\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2^{\,*} = 0, \tag{2.1}$$

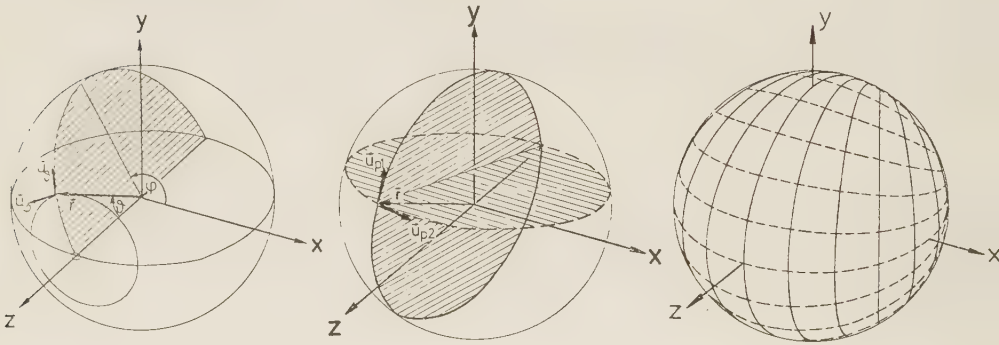
d. h. die Punkte $\vec{p}_1$ und $\vec{p}_2$ liegen auf der Poincaréschen Kugel einander gegenüber.

Sobald der Polarisationszustand $\vec{p}_1(\vartheta,\varphi)$ des Fernfeldes eines Strahlers bekannt ist, kann man stets nach Gl. (2.1) die dazu orthogonale Polarisation $\vec{p}_2(\vartheta,\varphi)$ angeben. Würde man $\vec{p}_1(\vartheta,\varphi)$ und $\vec{p}_2(\vartheta,\varphi)$ als Referenz- und Kreuzpolarisation wählen, so wäre jede Antenne für sich genommen kreuzpolarisationsfrei. Eine solche Wahl der Bezugspolarisation ist indessen nicht sinnvoll, weil eine allgemeine Definition natürlich unabhängig von der jeweiligen Antenne sein muß. Ludwig [14] behandelt verschiedene "Bezugskoordinatensysteme", von denen zur Polarisationsuntersuchung des Fernfeldes das System am geeignetsten erscheint, das sich an das allgemein angewandte Verfahren zur Messung des Fernfeldes anlehnt ("Ludwig-3-Definition"). Hiernach wird die Polarisation eines linear polarisierten Strahlungsfeldes mit Hilfe von zwei orthogonalen Polarisationseinheits-

vektoren $\vec{u}_{p1}$ und $\vec{u}_{p2}$ bestimmt:

$$\vec{u}_{p1} = \vec{u}_{\vartheta} \sin\varphi + \vec{u}_{\varphi} \cos\varphi,$$
$$\vec{u}_{p2} = \vec{u}_{\vartheta} \cos\varphi - \vec{u}_{\varphi} \sin\varphi. \qquad (2.2)$$

Abb. 2.1 zeigt das zugehörige Koordinatennetz auf der Einheitskugel. Für "y-Polarisation" der Strahlungsquelle *) wird die Referenzpolarisation zweckmäßig in Richtung von $\vec{u}_{p1}$ gelegt, die Kreuzpolarisation in Richtung von $\vec{u}_{p2}$. Für "x-Polarisation" ist es umgekehrt.



a) b) c)

Abb. 2.1

a) Kugelkoordinatensystem zur Beschreibung eines Fernfeldpunktes $\vec{r}(r,\vartheta,\varphi)$.

b) Richtung von $\vec{u}_{p1}$ und $\vec{u}_{p2}$ im Fernfeldpunkt $\vec{r}(r,\vartheta,\varphi)$.

c) Koordinatennetz zweier orthogonaler Polarisationen nach Gl. (2.2),

———— parallel $\vec{u}_{p1}$,

– – – – – – parallel $\vec{u}_{p2}$.

Bei einer $\pi/2$-Drehung des Koordinatensystems um die z-Achse gilt mit $\varphi^{+} = \varphi + \pi/2$:

*) Eine Strahlungsquelle wird hier als "y-polarisiert" bezeichnet, wenn bei der (äquivalenten) elektrischen Quellstromdichte die y-Komponente überwiegt (z. B. elektrische Dipole parallel zur y-Achse, keine x- und z-Komponente).

$$\vec{u}_{p1} = -\vec{u}_{\vartheta} \cos\varphi^{+} + \vec{u}_{\varphi+} \sin\varphi^{+} = -\vec{u}^{+}_{p2},$$

$$\vec{u}_{p2} = \vec{u}_{\vartheta} \sin\varphi^{+} + \vec{u}_{\varphi+} \sin\varphi^{+} = \vec{u}^{+}_{p1}.$$

Im $\vec{u}^{+}_{p1}$, $\vec{u}^{+}_{p2}$-Koordinatensystem werden die Polarisationseinheitsvektoren also (bis auf ein unbedeutendes Vorzeichen) durch die gleichen Ausdrücke wie im ursprünglichen System beschrieben. Diese sehr vorteilhafte Eigenschaft der durch Gl. (2.2) eingeführten Vektoren ist bei anderer Festlegung der Bezugspolarisation durchaus nicht selbstverständlich.

Zwei orthogonale elliptische Polarisationen im Fernfeld lassen sich mit Hilfe der Einheitsvektoren aus Gl. (2.2) beschreiben durch

$$\begin{aligned} \vec{u}^{e}_{p1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\vec{u}_{p1} + e^{j\psi_o}\, \vec{u}_{p2}], \\ \vec{u}^{e}_{p2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\vec{u}_{p1} - e^{j\psi_o}\, \vec{u}_{p2}], \end{aligned} \qquad (2.3)$$

mit konstantem Winkel ψ_o, der im Wertebereich $-\pi \leq \psi_o \leq \pi$ liegen kann und bei den Werten $\psi_o = \pm\pi/2$ und $\psi_o = 0, \pm\pi$ die Grenzfälle zirkularer und linearer Polarisation enthält.

Im Anschluß an Gln. (2.2) und (2.3) wird ein Strahlungsfeld dann als kreuzpolarisationsfrei bezeichnet, wenn überall nur e i n e der beiden linearen Polarisationen von Gl. (2.2) oder e i n e der beiden elliptischen Polarisationen von Gl. (2.3) vorhanden ist. Im folgenden Abschnitt wird dies für verschiedene Quellenverteilungen untersucht.

2.2 Kreuzpolarisationseigenschaften von Quellenverteilungen

2.2.1 Die Huygens-Quelle

Die Kombination eines elektrischen und eines dazu senkrecht stehenden magnetischen Dipols gleicher Stärke, die sog. "Huygens-Quelle", erzeugt ein kreuzpolarisationsfreies Fernfeld [15]. Ein in y-Richtung liegender elektrischer Dipol besitzt das elektrische Fernfeld

$$\vec{E}_e = E_{oe} \, (\vec{u}_\vartheta \cos\vartheta \sin\varphi + \vec{u}_\varphi \cos\varphi), \qquad (2.4)$$

das nicht kreuzpolarisationsfrei im Sinne von Gl. (2.2) ist, weil

$$\vec{E}_e \cdot \vec{u}_{p1} = E_{oe} \, (\cos\vartheta \sin^2\varphi + \cos^2\varphi),$$

$$\vec{E}_e \cdot \vec{u}_{p2} = E_{oe} \sin\varphi \cos\varphi \, (\cos\vartheta - 1).$$

Für das Fernfeld eines in x-Richtung orientierten magnetischen Dipols gilt:

$$\vec{E}_m = E_{om} \, (\vec{u}_\vartheta \sin\varphi + \vec{u}_\varphi \cos\vartheta \cos\varphi). \qquad (2.5)$$

Auch dieses Feld ist nicht kreuzpolarisationsfrei, da

$$\vec{E}_m \cdot \vec{u}_{p1} = E_{om} \, (\sin^2\varphi + \cos\vartheta \cos^2\varphi),$$

$$\vec{E}_m \cdot \vec{u}_{p2} = E_{om} \sin\varphi \cos\varphi \, (\cos\vartheta - 1).$$

Die Kombination beider Dipole liefert für das Fernfeld:

$$\vec{E}_g = \vec{E}_e + \vec{E}_m = \vec{u}_\vartheta \, (E_{oe} \cos\vartheta + E_{om}) \sin\varphi + \vec{u}_\varphi \, (E_{oe} + E_{om} \cos\vartheta) \cos\varphi, \qquad (2.6)$$

mit

$$\vec{E}_g \cdot \vec{u}_{p1} = (E_{oe} \cos\vartheta + E_{om}) \sin^2\varphi + (E_{oe} + E_{om} \cos\vartheta) \cos^2\varphi,$$

$$\vec{E}_g \cdot \vec{u}_{p2} = \sin\varphi \cos\varphi \, (1 - \cos\vartheta)(E_{oe} - E_{om}).$$

Dieses linear polarisierte Fernfeld ist kreuzpolarisationsfrei, wenn $E_{oe} = E_{om}$. Eine derartige Kombination eines elektrischen und eines magnetischen Dipols gleicher Stärke läßt sich in der Praxis nur näherungsweise realisieren, an ihr kann man jedoch wesentliche Eigenschaften kreuzpolarisationsfreier Erreger aufzeigen. Das Strahlungsfeld einer "y-polarisierten" Huygens-Einheitsquelle *)

*) Entsprechend der auf Seite 4 gegebenen Definition für die "y-Polarisation" einer Quelle wird die Richtung des elektrischen Dipols zur Beschreibung der Polarisation der Quelle benutzt.

ergibt sich nach Gl. (2.6) mit $E_{oe} = E_{om} = E_o$ zu

$$\frac{\vec{E}_{HQ}}{E_o} = (1 + \cos\vartheta)(\vec{u}_\vartheta \sin\varphi + \vec{u}_\varphi \cos\varphi) = \vec{e}_{HQ}.$$

2.2.2 Die Strahlergruppe aus Huygens-Quellen

N Huygens-Quellen in der Nähe des Koordinatenursprungs mögen "y-polarisiert" sein. Sie befinden sich an den Orten

$$\vec{r}_n = x_n' \vec{u}_x + y_n' \vec{u}_y + z_n' \vec{u}_z,$$

haben die Amplituden E_{on} und werden mit den Phasen ϕ_n angeregt ($n = 1,2,...N$). Das Fernfeld dieser Anordnung berechnet sich zu

$$\vec{E}_g = (1 + \cos\vartheta)(\vec{u}_\vartheta \sin\varphi + \vec{u}_\varphi \cos\varphi) \sum_{n=1}^{N} E_{on}\, e^{jkR_n}\, e^{j\phi_n}, \qquad (2.7)$$

mit

$$R_n = x_n' \sin\vartheta \cos\varphi + y_n' \sin\vartheta \sin\varphi + z_n' \cos\vartheta.$$

Wie sich durch Bildung der Skalarprodukte von $\vec{E}_g$ mit den Polarisationseinheitsvektoren nach Gl. (2.2) leicht zeigen läßt, ist das Fernfeld einer Anordnung aus Huygens-Quellen immer kreuzpolarisationsfrei, wenn alle Quellen die gleiche Erregerpolarisation besitzen:

$$\vec{E}_g \cdot \vec{u}_{p1} = (1 + \cos\vartheta) \sum_{n=1}^{N} E_{on}\, e^{j(kR_n + \phi_n)},$$

$$\vec{E}_g \cdot \vec{u}_{p2} = 0$$

Diese Aussage gilt auch für Gruppenantennen, die aus beliebigen kreuzpolarisationsfreien Einzelstrahlern gleicher Erregerpolarisation aufgebaut sind.

2.2.3 Die flächenhafte Quellenverteilung

Geht man nicht von einer Anordnung diskreter Strahler, sondern von einer flächenförmigen Quellenverteilung (magnetische Flächenstromdichte $\vec{M} = -\vec{n}' \times \vec{E}(\vec{r}')$ und elektrische Flächenstromdichte $\vec{J} = \vec{n}' \times \vec{H}(\vec{r}')$) auf einer geschlossenen Fläche F (Flächenelement df') aus, so berechnet sich das Fernfeld aus [16]

$$\vec{E}(\vec{r}) = jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \left[\vec{u}_r \times \vec{\Pi}_{mo} + Z\, \vec{u}_r \times (\vec{u}_r \times \vec{\Pi}_{eo})\right], \qquad (2.8)$$

mit

$\vec{u}_r$ Einheitsvektor, der vom Nullpunkt zum Aufpunkt zeigt,
Z Wellenwiderstand des freien Raumes,
k Wellenzahl des freien Raumes,

$\vec{\Pi}_{mo} = \oiint_F \vec{M}(\vec{r}')\, e^{jkR}\, df'$ magnetisches Vektorpotential im Fernfeld,

$\vec{\Pi}_{eo} = \oiint_F \vec{J}(\vec{r}')\, e^{jkR}\, df'$ elektrisches Vektorpotential im Fernfeld,

$\vec{n}'$ Normaleneinheitsvektor in das betrachtete Raumgebiet hinein,
$\vec{r}' = (x',y',z')$ Ortsvektor des Quellpunktes,
$\vec{r} = (x,y,z) = \vec{r}(r,\vartheta,\varphi)$ Ortsvektor des Aufpunktes, $r = |\vec{r}|$,
$R = |\vec{r} - \vec{r}'| = x' \sin\vartheta \cos\varphi + y' \sin\vartheta \sin\varphi + z' \cos\vartheta = \vec{r}' \cdot \vec{u}_r$.

Führt man die Vektoroperationen aus und bildet die Skalarprodukte mit $\vec{u}_{p1}$ und $\vec{u}_{p2}$ aus Gl. (2.2) so erhält man:

$$\begin{pmatrix} \vec{E}\cdot\vec{u}_{p1} \\ \vec{E}\cdot\vec{u}_{p2} \end{pmatrix} = jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \left[\begin{pmatrix} 1-\cos^2\varphi(1-\cos\vartheta) & -\sin\varphi\cos\varphi(1-\cos\vartheta) & -\sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\varphi\cos\varphi(1-\cos\vartheta) & \sin^2\varphi(1-\cos\vartheta) - 1 & \sin\vartheta\sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_{mox} \\ \Pi_{moy} \\ \Pi_{moz} \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. + Z \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\varphi(1-\cos\vartheta) & \sin^2\varphi(1-\cos\vartheta) - 1 & \sin\vartheta\sin\varphi \\ -1+\cos^2\varphi(1-\cos\vartheta) & \sin\varphi\cos\varphi(1-\cos\vartheta) & \sin\vartheta\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_{eox} \\ \Pi_{eoy} \\ \Pi_{eoz} \end{pmatrix} \right] \qquad (2.9)$$

Erwartungsgemäß kann für eine beliebige Flächenstromverteilung die Kreuzpolarisation nicht im gesamten Fernfeld verschwinden.

Die weiteren Überlegungen beziehen sich auf ebene Quellenverteilungen. Ferner wird vereinfachend angenommen, daß

(1) nur auf einer endlich großen Fläche F_o, die in der xy-Ebene liege, eine Quellstromverteilung existiert (außerhalb von F_o verschwinden auf F die Tangentialkomponenten von elektrischer und magnetischer Feldstärke),

(2) diese ebene Quellstromverteilung endlicher Ausdehnung sich im unendlich ausgedehnten freien Raum befindet und

(3) der Zusammenhang zwischen elektrischer und magnetischer Tangentialfeldstärke auf F_o durch

$$\vec{H}_{tan}(\vec{r}') = C \frac{1}{Z} \vec{n}' \times \vec{E}_{tan}(\vec{r}')$$

beschrieben werden kann (C dimensionslose Konstante), so daß auch

$$\vec{\Pi}_{eo} = - C \frac{1}{Z} \vec{n}' \times \vec{\Pi}_{mo} \tag{2.10}$$

gilt.

Damit vereinfacht sich Gl. (2.9) zu:

$$\begin{pmatrix} \vec{E}\cdot\vec{u}_{p1} \\ \vec{E}\cdot\vec{u}_{p2} \end{pmatrix} = jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \begin{pmatrix} \cos^2\varphi(1-\cos\vartheta)(C-1)+1+C\cos\vartheta & \sin\varphi\cos\varphi(1-\cos\vartheta)(C-1) \\ -\sin\varphi\cos\varphi(1-\cos\vartheta)(C-1) & \cos^2\varphi(1-\cos\vartheta)(C-1)-C-\cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_{mox} \\ \Pi_{moy} \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Weist die magnetische Flächenstromdichte $\vec{M}$ in Gl. (2.8) nur eine x-Komponente auf, so existiert auch nur eine x-Komponente des magnetischen Vektorpotentials $\vec{\Pi}_{mo}$. Die Kreuzpolarisation berechnet sich dann nach Gl. (2.11) zu

$$\vec{E}\cdot\vec{u}_{p2} = -jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \sin\varphi \cos\varphi \,(1-\cos\vartheta)(C-1)\, \Pi_{mox}(\vartheta,\varphi) \tag{2.12}$$

Man erkennt, daß im gesamten Fernfeld die Kreuzpolarisation verschwindet, wenn $C = 1$ ist, d. h. wenn auf F_o der Zusammenhang

$$\vec{H}_{tan}(\vec{r}') = \frac{1}{Z} \vec{n}' \times \vec{E}_{tan}(\vec{r}') \tag{2.13}$$

("balanced hybrid condition" [17]) besteht. Diese Aussage ist indessen wegen der Näherungsannahmen auf Seite 9 nur in beschränktem Maße zur Konstruktion kreuzpolarisationsfreier Flächenstrahler geeignet. Selbst bei der Abstrahlung aus einer die HE_{11}-Welle führenden gerieften Rundhohlleitung wird im Fernfeld eine beträchtliche Kreuzpolarisationskomponente gemessen [18], obwohl in der unendlich langen Leitung die transversalen Feldstärken bei geeigneter Riefentiefe nur jeweils eine kartesische Komponente besitzen und die Bedingung (2.13) erfüllen [17]. Um eine zuverlässige Aussage über die Kreuzpolarisation machen zu können, benötigt man die genaue Kenntnis der Ströme $\vec{M}(\vec{r}')$ und $\vec{J}(\vec{r}')$ in Gl. (2.8) auf der gesamten Fläche F und damit der Vektorpotentiale $\vec{\Pi}_{mo}$ und $\vec{\Pi}_{eo}$ in Gl. (2.9).

Ist $C \neq 1$, so kann nach Gl. (2.11) nicht mehr das gesamte Strahlungsfeld kreuzpolarisationsfrei sein. Zwei Fälle sind zu unterscheiden:

(1) Die Quellenverteilung besitzt eine geringe Ausdehnung. Dann strahlt sie Energie in einen großen Raumbereich (ϑ groß) ab. Um ein kreuzpolarisationsarmes Fernfeld zu erzeugen, muß die magnetische Flächenstromdichte in diesem Fall sowohl eine x- als auch eine y-Komponente aufweisen, so daß die Beiträge von Π_{mox} und Π_{moy} zur Kreuzpolarisation sich gegenseitig weitgehend aufheben. Nach Gl. (2.11) muß

$$\sin\varphi\cos\varphi(1-\cos\vartheta)(C-1)\Pi_{mox} \approx [\cos^2\varphi(1-\cos\vartheta)(C-1)-C-\cos\vartheta]\Pi_{moy} \qquad (2.14a)$$

gelten. Diese Bedingung wird von Rundhohlleitungsstrahlern mit bestimmten Durchmessern recht gut erfüllt, wie in Kapitel 4 noch gezeigt werden wird.

(2) Die Quellenverteilung besitzt eine große Ausdehnung, d. h. sie strahlt eng gebündelt in die unmittelbare Umgebung von $\vartheta = 0$. Aus Gl. (2.11) erhält man mit $\cos\vartheta \approx 1$

$$\vec{E}\cdot\vec{u}_{p2} \approx -(C+1)\,\Pi_{moy}. \qquad (2.14b)$$

In diesem Fall sollte die Flächenstromdichte $\vec{M}$ nur eine x-Komponente besitzen; denn mit $M_y = 0$ verschwinden Π_{moy} und auch die Kreuzpolarisation für $\vartheta \approx 0$. Diese Bedingung wird von Hohlleitungsstrahlern mit großer rechteckiger Öffnungsfläche näherungsweise erfüllt.

Im folgenden wird gezeigt, daß es für symmetrische Quellenverteilungen bestimmte Ebenen im Fernfeld gibt, in denen keine Kreuzpolarisation auftritt. Legt man

einen Kreis vom Radius ρ_o um die Quellenverteilung auf F_o, dann läßt sich die magnetische Flächenstromdichte $\vec{M}(\vec{r}')$ in eine Fourier-Besselreihe über die Kreisfläche F_k entwickeln [19]. Mit den auf den Mittelpunkt von F_k bezogenen Zylinderkoordinaten des Quellsystems $(\rho',\varphi',z'=0)$ erhält man für $0 \leq \rho' \leq \rho_o$ und $-\pi \leq \varphi' \leq \pi$:

$$\vec{M}(\vec{r}') = \vec{u}_x \sum_{i=0}^{\infty} \left[b_{1i}(\rho') \cos(i\varphi') + b_{2i}(\rho') \sin(i\varphi') \right] + \vec{u}_y \sum_{i=0}^{\infty} \left[b_{3i}(\rho') \cos(i\varphi') + b_{4i}(\rho') \sin(i\varphi') \right], \qquad (2.15)$$

mit

$$b_{\mu i}(\rho') = \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{\mu i \ell} \, J_i(\gamma_{i\ell}\rho'), \quad \mu = 1, 2, 3, 4,$$

$$J_i(\gamma_{i\ell}\rho_o) = 0,$$

wobei J_i die Besselfunktion der Ordnung i ist. Das magnetische Vektorpotential in der Fernfeldnäherung Gl. (2.8) kann damit als Integral über die Fläche F_k berechnet werden:

$$\vec{\Pi}_{mo} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_o} \left\{ \vec{u}_x \sum_{i=0}^{\infty} \left[b_{1i}(\rho') \cos(i\varphi') + b_{2i}(\rho') \sin(i\varphi') \right] + \vec{u}_y \sum_{i=0}^{\infty} \left[b_{3i}(\rho') \cos(i\varphi') + b_{4i}(\rho') \sin(i\varphi') \right] \right\} e^{jkR\rho'} d\rho' d\varphi', \qquad (2.16)$$

mit

$$R = \rho' \sin\vartheta \cos(\varphi'-\varphi).$$

Substituiert man $\varphi' - \varphi = \alpha$ und beachtet, daß R eine gerade Funktion in α ist, so kann die Integration zunächst über $d\alpha = d\varphi'$ und dann über $d\rho'$ geschlossen ausgeführt werden:

$$\vec{\Pi}_{mo} = \vec{u}_x \sum_{i=0}^{\infty} \left[B_{1i}(\vartheta) \cos(i\varphi) + B_{2i}(\vartheta) \sin(i\varphi) \right] + \vec{u}_y \sum_{i=0}^{\infty} \left[B_{3i}(\vartheta) \cos(i\varphi) + B_{4i}(\vartheta) \sin(i\varphi) \right], \tag{2.17}$$

mit

$$B_{\mu i}(\vartheta) = 2\pi j^i \rho_o J_i(k\rho_o \sin\vartheta) \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{\mu i \ell} \frac{\gamma_{i\ell}}{\gamma_{i\ell}^2 - (k \sin\vartheta)^2} J_{i+1}(\gamma_{i\ell}\rho_o),$$

$$\mu = 1, 2, 3, 4.$$

Der Vergleich von Gl. (2.15) mit (2.17) zeigt, daß jeder Summand aus Gl. (2.15), der eine magnetische Flächenstrombelegung i-facher φ'-Abhängigkeit beschreibt, ein magnetisches Vektorpotential mit i-facher φ-Abhängigkeit erzeugt. Daher sind die Anteile mit unterschiedlicher Winkelabhängigkeit voneinander entkoppelt und können getrennt behandelt werden. Nach Gl. (2.10) gilt dies für die elektrische Flächenstrombelegung und das elektrische Vektorpotential entsprechend.

Für Quellenbelegungen, die symmetrisch zur x-Achse liegen, berechnen sich z. B. mit der magnetischen Flächenstromdichte

$$\vec{M}(\vec{r}') = \vec{u}_x \sum_{i=0}^{\infty} b_{1i}(\rho') \cos(i\varphi') + \vec{u}_y \sum_{i=1}^{\infty} b_{4i}(\rho') \sin(i\varphi') \tag{2.18}$$

Referenz- und Kreuzpolarisation nach Gl. (2.11) zu

$$\vec{E}\cdot\vec{u}_{p1} = jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \left\{ \left[\cos^2\varphi(1-\cos\vartheta)(C-1)+1+C\cos\vartheta \right] \sum_{i=0}^{\infty} B_{1i}(\vartheta) \cos(i\varphi) + \left[\sin\varphi\cos\varphi(1-\cos\vartheta)(C-1) \right] \sum_{i=1}^{\infty} B_{4i}(\vartheta) \sin(i\varphi) \right\}, \tag{2.19a}$$

$$\vec{E}\cdot\vec{u}_{p2} = jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \left\{ \sin\varphi\cos\varphi(1-\cos\vartheta)(C-1) \sum_{i=0}^{\infty} B_{1i}(\vartheta) \cos(i\varphi) - \left[\sin^2\varphi(1-\cos\vartheta)(C-1)+1+C\cos\vartheta \right] \sum_{i=1}^{\infty} B_{4i}(\vartheta) \sin(i\varphi) \right\}. \tag{2.19b}$$

Aus Gl. (2.19b) ist zu ersehen, daß bei der oben vorausgesetzten Symmetrie die Kreuzpolarisation in den Ebenen $\varphi = 0$ und π verschwindet. Hieraus kann man allgemein ableiten, daß ein Fernfeld in einer Symmetrieebene kreuzpolarisationsfrei ist. Häufig stellt man jedoch bei Messungen von als symmetrisch angenommenen Antennen in den Symmetrieebenen eine erhebliche Kreuzpolarisation im Strahlungsfeld fest. Dieser Befund weist dann darauf hin, daß eine Symmetriestörung der Quellenverteilung vorliegt, die z. B. auf Fertigungsfehler zurückzuführen ist.

2.3 Merkmale eines kreuzpolarisationsfreien Strahlungsfeldes

Um zu allgemeinen Kriterien für die Kreuzpolarisationsfreiheit des Strahlungsfeldes einer Antenne zu gelangen, geht man zweckmäßigerweise von Gl. (2.2) aus. Danach sind im linear polarisierten Fall zwei Felder orthogonal, wenn sie durch

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\ell 1}(\vartheta,\varphi) &= f(\vartheta,\varphi)\,[\vec{u}_{\vartheta}\sin\varphi + \vec{u}_{\varphi}\cos\varphi] = f(\vartheta,\varphi)\,\vec{u}_{p1}, \\ \vec{E}_{\ell 2}(\vartheta,\varphi) &= g(\vartheta,\varphi)\,[\vec{u}_{\vartheta}\cos\varphi - \vec{u}_{\varphi}\sin\varphi] = g(\vartheta,\varphi)\,\vec{u}_{p2} \end{aligned} \tag{2.20}$$

beschrieben werden können. Zwischen der ϑ- und φ-Komponente des elektrischen Feldes muß also der Zusammenhang

$$\frac{E_{\vartheta}(\vartheta,\varphi)}{E_{\varphi}(\vartheta,\varphi)} = \tan\varphi \qquad \text{oder} \qquad \frac{E_{\vartheta}(\vartheta,\varphi)}{E_{\varphi}(\vartheta,\varphi)} = -\frac{1}{\tan\varphi} \tag{2.21}$$

bestehen. Gelingt es eine Antenne zu konstruieren, die entweder ein Fernfeld $\vec{E}_{\ell 1}(\vartheta,\varphi)$ oder $\vec{E}_{\ell 2}(\vartheta,\varphi)$ nach Gl. (2.20) besitzt, so ist diese Antenne kreuzpolarisationsfrei. Soll e i n e Antenne zwei kreuzpolarisationsfreie Felder erzeugen, so müssen diese von der Art $\vec{E}_{\ell 1}(\vartheta,\varphi)$ und $\vec{E}_{\ell 2}(\vartheta,\varphi)$ sein.

Für kreuzpolarisationsfreie Abstrahlung zirkular oder elliptisch polarisierter Wellen müssen in Gl. (2.20) $f(\vartheta,\varphi)$ und $g(\vartheta,\varphi)$ nach Betrag und Phase gleich sein. Mit Gl. (2.3) gelten dann

$$\begin{aligned} \vec{E}_{e1}(\vartheta,\varphi) &= f(\vartheta,\varphi)\,\vec{u}^{e}_{p1}, \\ \vec{E}_{e2}(\vartheta,\varphi) &= f(\vartheta,\varphi)\,\vec{u}^{e}_{p2}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Häufig benötigt man Antennensysteme mit rotationssymmetrischen Diagrammen. Die Strahlungsfelder nach Gln. (2.20) und (2.22) sind rotationssymmetrisch, wenn f und g unabhängig von φ sind, d. h.

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\ell 1}(\vartheta,\varphi) &= f(\vartheta)\ \vec{u}_{p1}, & \vec{E}_{e1}(\vartheta,\varphi) &= f(\vartheta)\ \vec{u}^{e}_{p1}, \\ \vec{E}_{\ell 2}(\vartheta,\varphi) &= g(\vartheta)\ \vec{u}_{p2}, & \vec{E}_{e2}(\vartheta,\varphi) &= f(\vartheta)\ \vec{u}^{e}_{p2}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Für Antennen mit einem Fernfeld nach Gln. (2.23) sind E- und H-Diagramm *) identisch. In der Literatur wird dies häufig als Kriterium für Kreuzpolarisationsfreiheit angesehen. Dies ist jedoch nicht richtig, weil nicht jedes rotationssymmetrische Antennendiagramm die Bedingung (2.21) erfüllt. Gln. (2.20) und (2.22) machen deutlich, daß auch ein Strahlungsdiagramm mit verschiedenen Halbwertsbreiten in zwei senkrecht aufeinander stehenden Ebenen kreuzpolarisationsfrei sein kann. Solche "asymmetrischen" Diagramme benötigt man z. B., wenn eine Satellitenantenne ein nicht kreisförmiges Gebiet auf der Erde ausleuchten soll, oder wenn eine Radarantenne unterschiedliche Winkelauflösungsvermögen in zwei senkrechten Ebenen haben soll.

*) Winkelabhängigkeit der elektrischen Feldstärke in der E- und H-Ebene einer Antenne.

3. Berechnung der Aperturverteilung und des Strahlungsfeldes von Hohlleitungsstrahlern

Aussagen über die Kreuzpolarisationseigenschaften eines Strahlers setzen die Kenntnis des Verlaufs der elektrischen Feldstärke im Fernfeld voraus. Da bereits kleine Fehler bei der Berechnung des Strahlungsfeldes erhebliche Auswirkungen auf den Wert der Kreuzpolarisation haben können, benötigt man Berechnungsverfahren, die ohne tiefgreifende Näherungen auskommen. Das sehr einfach handzuhabende und daher häufig benutzte Kirchhoffsche Verfahren reicht wegen seines Näherungscharakters zur Berechnung der Kreuzpolarisation von Flächenstrahlern meist nicht aus. Daher müssen mathematisch aufwendigere und z. T. nur auf spezielle Strukturen anwendbare Methoden, wie die Feldentwicklungsmethode [20], die Wiener-Hopf-Technik (z. B. [21, 22]), die geometrische Theorie der Beugung [23] oder verschiedene Integralgleichungsverfahren [24] verwendet werden. Wegen der Übersichtlichkeit bei der Formulierung und der vielseitigen Einsetzbarkeit sollen im Rahmen dieser Arbeit Integralgleichungen benutzt und mit Hilfe der Momentenmethode gelöst werden.

3.1 Das Kirchhoff-Hugenssche Prinzip

Die im folgenden angewandten Integralgleichungs- und Näherungsverfahren bauen auf einem von Huygens im Jahre 1678 formulierten Prinzip auf. In seiner elementaren Form besagt es, daß in jeder Welle eine beliebige Wellenfront als Quelle unendlich vieler neuer Elementarwellen angesehen werden kann, die sich in Ausbreitungsrichtung wieder zu der ursprünglichen Welle überlagern [25]. 1859 gelang es Helmholtz, einige Jahre später auch Kirchhoff das Huygenssche Prinzip vom Standpunkt der Theorie der Wellengleichung einwandfrei zu formulieren [26]. Insbesondere in der Optik wird diese als "Kirchhoffsche Formel" geläufige Lösung der skalaren Helmholtzgleichung

$$\Delta u(\vec{r}) + k^2 u(\vec{r}) = 0$$

häufig benutzt. Sie lautet für ein quellenfreies, homogenes und isotropes Raumgebiet V:

$$u(\vec{r}) = \oiint_F [u(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} G_o(\vec{r},\vec{r}') - G_o(\vec{r},\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} u(\vec{r}')] \, df'. \qquad (3.1)$$

Dabei bedeuten

$G_o(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ Greensche Funktion des freien Raumes,

$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$ Ortsvektor des Aufpunktes,

$\vec{r}' = x'\vec{u}_x + y'\vec{u}_y + z'\vec{u}_z$ Ortsvektor des Quellpunktes auf F,

$k = \omega\sqrt{\varepsilon_o \varepsilon_r \mu_o \mu_r}$ Wellenzahl des homogenen Raumgebietes V,

F geschlossene Hüllfläche um V und

$\frac{\partial}{\partial n'}$ Ableitung in Richtung des Normaleneinheitsvektors $\vec{n}'$ der Fläche F, wobei $\vec{n}'$ in das betrachtete Gebiet V weist.

Rayleigh [27] und Sommerfeld [28] haben unter Verwendung der Greenschen Funktionen $G_1(\vec{r},\vec{r}')$ und $G_2(\vec{r},\vec{r}')$, die der inhomogenen Helmholtzgleichung

$$\Delta G_{1,2}(\vec{r},\vec{r}') + k^2 G_{1,2}(\vec{r},\vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

genügen, für $|\vec{r}| \to \infty$ die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung erfüllen und für die auf der Randfläche F die Beziehungen

$G_1(\vec{r},\vec{r}') = 0$ (1. Randwertaufgabe, Dirichletbedingung),

$\frac{\partial}{\partial n'} G_2(\vec{r},\vec{r}') = 0$ (2. Randwertaufgabe, Neumannbedingung)

gelten, Formulierungen gefunden, die als Quellfunktion im Gegensatz zu Gl. (3.1) entweder $u(\vec{r}')$ oder $\frac{\partial}{\partial n'} u(\vec{r}')$ enthalten:

$$u(\vec{r}) = \oiint_F u(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} G_1(\vec{r},\vec{r}') \, df', \qquad (3.2)$$

$$u(\vec{r}) = \oiint_F G_2(\vec{r},\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} u(\vec{r}') \, df'. \qquad (3.3)$$

Für den Fall einer unendlich ausgedehnten ebenen Randfläche können die Greenschen Funktionen G_1 und G_2 nach dem Spiegelungsprinzip angegeben werden. Hieraus folgen

$$\frac{\partial}{\partial n'} G_1(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n'} \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = 2 \frac{\partial}{\partial n'} G_0(\vec{r},\vec{r}'),$$

$$G_2(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = 2\, G_0(\vec{r},\vec{r}')$$

für die in Gln. (3.2) und (3.3) auftretenden Ausdrücke.

Die Gl. (3.1) entsprechenden vektoriellen Formeln wurden zuerst von Kottler [29] und dann auch von anderen Autoren (s. die Literaturliste in [30]) in unterschiedlichen Schreibweisen angegeben. Mit Hilfe der dyadischen bzw. tensoriellen Greenschen Funktion $\Gamma_0(\vec{r},\vec{r}')$, die der Differentialgleichung

$$\text{rot rot}\, \Gamma_0(\vec{r},\vec{r}') - k^2 \Gamma_0(\vec{r},\vec{r}') = \text{rot}[\delta(\vec{r}-\vec{r}')\cdot\in]$$

mit der Einheitsdyade $\in$ genügt, und für $|\vec{r}| \to \infty$ die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung erfüllt, erhält man wieder für ein homogenes, isotropes und quellenfreies Raumgebiet [31, 32]:

$$\text{rot}\, \vec{H}(\vec{r}) = \iint_F [\vec{n}' \times \vec{H}(\vec{r}')\cdot \text{rot}\, \Gamma_0(\vec{r},\vec{r}') + \vec{n}' \times \text{rot}'\vec{H}(\vec{r}')\cdot\Gamma_0(\vec{r},\vec{r}')]\, df', \qquad (3.4a)$$

$$\text{rot}\, \vec{E}(\vec{r}) = \iint_F [\vec{n}' \times \text{rot}'\vec{E}(\vec{r}')\cdot\Gamma_0(\vec{r},\vec{r}') + \vec{n}' \times \vec{E}(\vec{r}')\cdot \text{rot}\Gamma_0(\vec{r},\vec{r}')]\, df', \qquad (3.4b)$$

mit

$$\Gamma_0 = \text{rot}\left[G_0(\vec{r},\vec{r}')\cdot\in\right] = \text{rot}\left[\frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi\,|\vec{r}-\vec{r}'|}\cdot\in\right].$$

Dabei besagt der Apostroph an den Differentialoperatoren, daß diese auf die Quellpunktkoordinaten wirken. Führt man abkürzend die elektrische Oberflächenstromdichte durch

$$\vec{J}(\vec{r}') = \vec{n}' \times \vec{H}(\vec{r}') = -\frac{1}{j\omega\mu_o\mu_r}\,\vec{n}' \times \mathrm{rot}'\vec{E}(\vec{r}')$$

und die magnetische Oberflächenstromdichte durch

$$\vec{M}(\vec{r}') = -\vec{n}' \times \vec{E}(\vec{r}') = -\frac{1}{j\omega\varepsilon_o\varepsilon_r}\,\vec{n}' \times \mathrm{rot}'\vec{H}(\vec{r}')$$

ein, so ergibt sich nach einigen Umformungen

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\,\mathrm{rot}\,\vec{\Pi}_m(\vec{r}) + \frac{1}{j\omega\varepsilon_o\varepsilon_r}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{\Pi}_e(\vec{r}), \tag{3.5a}$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \mathrm{rot}\,\vec{\Pi}_e(\vec{r}) + \frac{1}{j\omega\mu_o\mu_r}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{\Pi}_m(\vec{r}), \tag{3.5b}$$

wobei

$$\vec{\Pi}_e(\vec{r}) = \oiint_F \vec{J}(\vec{r}')\, G_o(\vec{r},\vec{r}')\, df'$$

das elektrische Vektorpotential und

$$\vec{\Pi}_m(\vec{r}) = \oiint_F \vec{M}(\vec{r}')\, G_o(\vec{r},\vec{r}')\, df'$$

das magnetische Vektorpotential sind.

Unter Einführung der Greenschen Dyaden $\Gamma_1(\vec{r},\vec{r}')$ und $\Gamma_2(\vec{r},\vec{r}')$, für die auf der Randfläche die Beziehungen

$$\vec{n}' \times \Gamma_1(\vec{r},\vec{r}') = 0 \qquad \text{(1. Randwertaufgabe)}$$

und

$$\vec{n}' \times \mathrm{rot}\,\Gamma_2(\vec{r},\vec{r}') = 0 \qquad \text{(2. Randwertaufgabe)}$$

gelten, hat Severin [32] vektorielle Ausdrücke analog zu Gln. (3.2) und (3.3) angegeben, die es erlauben, das Feld im Innern von V aus nur einer Tangentialkomponente der Feldstärken auf der Hüllfläche $\vec{E}_{tan}$ oder $\vec{H}_{tan}$ zu berechnen:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r} \operatorname{rot} \oiint_F \vec{J}(\vec{r}')\cdot\Gamma_1(\vec{r},\vec{r}')\, df', \tag{3.6a}$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \oiint_F \vec{J}(\vec{r}')\cdot\Gamma_1(\vec{r},\vec{r}')\, df', \tag{3.6b}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\oiint_F \vec{M}(\vec{r}')\cdot\Gamma_2(\vec{r},\vec{r}')\, df', \tag{3.7a}$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{j\omega\mu_0\mu_r} \operatorname{rot} \oiint_F \vec{M}(\vec{r}')\cdot\Gamma_2(\vec{r},\vec{r}')\, df'. \tag{3.7b}$$

Für eine unendlich ausgedehnte ebene Randfläche können - wie schon im skalaren Fall - $\Gamma_1(\vec{r},\vec{r}')$ und $\Gamma_2(\vec{r},\vec{r}')$ nach dem Spiegelungsprinzip berechnet werden. Daraus folgen:

$$\operatorname{rot}\Gamma_1(\vec{r},\vec{r}') = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\left[\frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{2\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\cdot\epsilon\right] = 2\operatorname{rot}\Gamma_0(\vec{r},\vec{r}'),$$

$$\Gamma_2(\vec{r},\vec{r}') = \operatorname{rot}\left[\frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{2\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\cdot\epsilon\right] = 2\Gamma_0(\vec{r},\vec{r}').$$

Gln. (3.6) und (3.7) werden dann zu

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{2}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r} \operatorname{rot}\operatorname{rot}\iint_{F_e} \vec{J}(\vec{r}')\, G_0(\vec{r},\vec{r}')\, df', \tag{3.8a}$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = 2\operatorname{rot}\iint_{F_e} \vec{J}(\vec{r}')\, G_0(\vec{r},\vec{r}')\, df', \tag{3.8b}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -2\operatorname{rot}\iint_{F_e} \vec{M}(\vec{r}')\, G_0(\vec{r},\vec{r}')\, df', \tag{3.9a}$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{2}{j\omega\mu_0\mu_r} \operatorname{rot}\operatorname{rot}\iint_{F_e} \vec{M}(\vec{r}')\, G_0(\vec{r},\vec{r}')\, df'. \tag{3.9b}$$

Die Flächenintegrale in Gln. (3.1 - 7) werden über die geschlossene Hüllfläche F des betrachteten quellenfreien homogenen Raumgebietes V erstreckt. Im Falle einer unendlich ausgedehnten ebenen Randfläche F_e ist die Hüllfläche im Unendlichen zu schließen. Da elektromagnetische Strahlungs- und Beugungsfelder stets der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung genügen, liefern Flächenintegrale über

den Flächenteil im Unendlichen keinen Beitrag.

Die Untersuchung der Polarisationseigenschaften des Strahlungsfeldes beschränkt sich im allgemeinen auf das Fernfeld, für das $|\vec{r}|\lambda \gg d^2$ gilt (sog. "Fraunhofer-Zone"), wobei d die größte Linearabmessung des Quellsystems ist. Mit der dann aus Gl. (3.1) folgenden Näherung

$$G_{oo} \approx \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} e^{jk\vec{r}'\cdot\vec{u}_r} \tag{3.10}$$

und mit

$$\text{rot } \vec{\Pi}_m \approx -jk\vec{u}_r \times \vec{\Pi}_m,$$

$$\text{rot rot } \vec{\Pi}_e \approx -jk\, \vec{u}_r \times (-jk\, \vec{u}_r \times \vec{\Pi}_e)$$

erhält man aus Gl. (3.5a) die bereits benutzte Gl. (2.8). Entsprechend ergibt sich für eine ebene Randfläche das Fernfeld aus Gl. (3.8a) zu

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{e^{-jkr}}{2\pi r} jk\, Z\, \vec{u}_r \times (\vec{u}_r \times \vec{\Pi}_{eo}), \tag{3.11}$$

aus Gl. (3.9a) zu

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{e^{-jkr}}{2\pi r} jk\, \vec{u}_r \times \vec{\Pi}_{mo}. \tag{3.12}$$

Unter dem Fernfelddiagramm einer Antenne versteht man die Abhängigkeit der elektrischen Feldstärke von ϑ und φ bei festem r. Es ist üblich $\vec{E}(\vartheta,\varphi)$ auf den Maximalwert E_{max} auf der Kugel r = const. zu normieren.

3.2 Kirchhoffsche Näherungsverfahren

Gln. (3.1 - 9) liefern das exakte Feld im Aufpunkt, wenn die tangentialen Feldkomponenten auf der Hüllfläche bekannt sind. Dies ist bei Beugungs- und Streuproblemen jedoch im allgemeinen nicht der Fall. Die "Kirchhoffsche Näherung" besteht darin, statt der unbekannten Randwerte plausible Näherungswerte einzusetzen. Gln. (3.1) und (3.4) beinhalten bei diesem Vorgehen eine zusätzliche Problematik. Die gleichzeitige Vorgabe von $u(\vec{r}')$ und $\frac{\partial}{\partial n'}u(\vec{r}')$ oder $\vec{E}_{tan}(\vec{r}')$

und $\vec{H}_{tan}(\vec{r}')$ bedeutet eine mathematische Unsauberkeit, da nach dem Eindeutigkeitssatz bereits durch die Wahl der einen Feldgröße auf der Randfläche das Feld im gesamten Raumgebiet einschließlich der Berandung und damit auch die zweite Feldgröße bestimmt sind. Gln. (3.1) und (3.4) liefern daher mit den Kirchhoffschen Annahmen zwar Lösungen der Wellengleichung und der Maxwellschen Gleichungen, diese Lösungen reproduzieren jedoch nicht die angenommenen Randwerte. Gln. (3.2) und (3.3) sowie (3.6) und (3.7) vermeiden diese mathematischen Schwierigkeiten. Die Bestimmung der Greenschen Funktionen G_1 und G_2 oder der Dyaden Γ_1 und Γ_2 ist indessen - bis auf den Sonderfall des ebenen Schirms - so aufwendig, daß dieses Verfahren kaum praktische Bedeutung hat.

In Tab. 3.1 werden die drei Kirchhoffschen Ansätze einander gegenübergestellt. Das Verfahren EHR wurde von Chu [33] zur Berechnung von Hohlleitungs- und Hornstrahlern vorgeschlagen. Dabei wird in der Hohlleitungsöffnung ein transversales elektrisches und magnetisches Feld zugrunde gelegt, das aus der einfallenden H- oder E-Welle und der reflektierten Welle entsteht. Ferner wird angenommen, daß $\vec{E}_{tan}$ und $\vec{H}_{tan}$ auf der Hohlleitungswand verschwinden. Dies ist zwar für $\vec{E}_{tan}$ wegen der hohen metallischen Leitfähigkeit gerechtfertigt, für $\vec{H}_{tan}$ jedoch zumindest zweifelhaft. Der Reflexionsfaktor in der Öffnungsebene ist unbekannt und muß gemessen oder geschätzt werden. Wird für ihn ein falscher Wert angenommen, so können sich erhebliche Abweichungen in der Strahlungscharakteristik ergeben [34]. Mit obigen Annahmen erhält man für die elektrische Feldstärke im Fernfeld aus Gl. (2.8)

$$(E_\vartheta)_{EHR} = \frac{e^{-jkr}}{4\pi kr}\, j\, E_o \left[1 + \frac{\beta_{mn}}{k}\cos\vartheta + r_o\left(1 - \frac{\beta_{mn}}{k}\cos\vartheta\right)\right] f_\vartheta(\vartheta,\varphi), \tag{3.13a}$$

$$(E_\varphi)_{EHR} = \frac{e^{-jkr}}{4\pi kr}\, j\, E_o \left[\frac{\beta_{mn}}{k} + \cos\vartheta - r_o\left(\frac{\beta_{mn}}{k} - \cos\vartheta\right)\right] f_\varphi(\vartheta,\varphi). \tag{3.13b}$$

wobei $\beta_{mn} = \frac{2\pi}{\lambda_{gmn}}$ die Phasenkonstante der einfallenden Hohlleitungswelle und r_o der Reflexionsfaktor in der Öffnung sind, und $f_\vartheta(\vartheta,\varphi)$ und $f_\varphi(\vartheta,\varphi)$ für kreisförmige und rechteckige Hohlleitungsquerschnitte im Anhang 6.1 angegeben werden.

Bei den Verfahren ER und HR wird die Hohlleitungsöffnung als Teil einer unendlich ausgedehnten ebenen Fläche angesehen. Sie bauen auf Gln. (3.9) und (3.8) auf, die es gestatten, das elektromagnetische Feld im betrachteten Raumbereich entweder aus $\vec{E}_{tan}$ allein oder aus $\vec{H}_{tan}$ allein zu berechnen. Da diese Randwerte

Verfahren	EHR	ER	HR
Gleichung für das Strahlungsfeld einer beliebig gekrümmten Aperturfläche	(3.5)		
Gleichung für das Strahlungsfeld einer ebenen Aperturfläche		(3.9)	(3.8)
benötigte Randwerte	$\vec{E}_{tan}$, $\vec{H}_{tan}$	$\vec{E}_{tan}$	$\vec{H}_{tan}$
Zusammenhang zwischen den Feldkomponenten	$(\vec{E})_{EHR} = 1/2\,[(\vec{E})_{ER} + (\vec{E})_{HR}]$ $(\vec{H})_{EHR} = 1/2\,[(\vec{H})_{ER} + (\vec{H})_{HR}]$		
Näherungsannahmen in der Apertur *)	$\vec{E}_{tan}(\vec{r}') = (1 + r_o)\,\vec{E}^{e}_{tan}$ $\vec{H}_{tan}(\vec{r}') = (1 - r_o)\,\vec{H}^{e}_{tan}$	$\vec{E}_{tan}(\vec{r}') = (1 + r_o)\,\vec{E}^{e}_{tan}$	$\vec{H}_{tan}(\vec{r}') = (1 - r_o)\,\vec{H}^{e}_{tan}$
Näherungsannahmen außerhalb der Apertur	$\vec{E}_{tan}(\vec{r}') = 0$ $\vec{H}_{tan}(\vec{r}') = 0$	$\vec{E}_{tan}(\vec{r}') = 0$	$\vec{H}_{tan}(\vec{r}') = 0$

Tab. 3.1 Näherungsverfahren zur Berechnung des Strahlungsfeldes von Hohlleitungsstrahlern.

*) $\vec{E}^{e}_{tan}$ und $\vec{H}^{e}_{tan}$ bezeichnen die Tangentialkomponenten der einfallenden ungestörten Welle.

nicht bekannt sind, werden in der Öffnung wieder die gleichen Näherungswerte wie beim Verfahren EHR angenommen und außerhalb der Öffnung die tangentialen Feldstärken gleich Null gesetzt. Im Gegensatz zum Verfahren EHR reproduzieren Gln. (3.9) und (3.8) die näherungsweise angenommenen Randwerte in der Öffnungsebene.

Zur Berechnung der Abstrahlung von Hohlleitungsöffnungen wird häufig das Verfahren ER benutzt [35], das für die elektrische Feldstärke im Fernfeld

$$(E_\vartheta)_{ER} = \frac{e^{-jkr}}{2\pi kr}\, j\, E_o\, (1 + r_o)\, f_\vartheta(\vartheta,\varphi), \tag{3.14a}$$

$$(E_\varphi)_{ER} = \frac{e^{-jkr}}{2\pi kr}\, j\, E_o\, (1 + r_o)\, \cos\vartheta\, f_\varphi(\vartheta,\varphi), \tag{3.14b}$$

mit $f_\vartheta(\vartheta,\varphi)$ und $f_\varphi(\vartheta,\varphi)$ wie in Gln. (3.13a,b) liefert. Der Reflexionsfaktor r_o ist bei den Verfahren ER und HR für die Bestimmung des Fernfelddiagramms ohne Bedeutung, weil er im Gegensatz zu Gln. (3.13a,b) hier nicht in die Winkelabhängigkeit der elektrischen Feldstärke eingeht.

Das Verfahren HR wird im allgemeinen nicht zur Berechnung des Strahlungsfeldes von Flächenstrahlern benutzt. Es soll jedoch hier mit in die Überlegungen einbezogen werden, da es bei der Untersuchung der Beugung an Blenden im ideal leitenden ebenen Schirm gute Näherungsergebnisse liefert [36, 37]. Die Gln. (3.8a,b) entsprechenden Ausdrücke für das Fernfeld lauten:

$$(E_\vartheta)_{HR} = \frac{e^{-jkr}}{2\pi kr}\, j\, E_o\, \frac{\beta_{mn}}{k}\, (1 - r_o)\, \cos\vartheta\, f_\vartheta(\vartheta,\varphi), \tag{3.15a}$$

$$(E_\varphi)_{HR} = \frac{e^{-jkr}}{2\pi kr}\, j\, E_o\, \frac{\beta_{mn}}{k}\, (1 - r_o)\, f_\varphi(\vartheta,\varphi). \tag{3.15b}$$

Die drei skizzierten Näherungsverfahren werden im 4. Kapitel auf ihre Brauchbarkeit insbesondere zur Berechnung der Kreuzpolarisation durch Vergleich mit Messungen und den Ergebnissen eines Integralgleichungsverfahrens untersucht.

3.3 Integralgleichungsverfahren

Über das Kreuzpolarisationsverhalten von Aperturantennen liefern die Kirchhoffschen Näherungsverfahren - wie im 4. Kapitel noch gezeigt wird - in praktischen Anwendungsfällen meist keine zuverlässigen Aussagen. Aus der Literatur ist eine Vielzahl von exakten analytischen und numerischen Untersuchungen bekannt, die sich mit der Beugung an Blenden und der Abstrahlung von endlichen Aperturen beschäftigen (vergl. z. B. das umfangreiche Literaturverzeichnis in [24]). Im folgenden wird in Anlehnung an Harrington [38] eine Integralgleichung angegeben, die mit Hilfe der Momentenmethode gelöst wird. Das Verfahren der Momentenmethode bestimmt dabei die erreichbare Genauigkeit. Die Berechnung des Strahlungsfeldes kann in diesem Sinn als "exakt" bezeichnet werden.

3.3.1 Lösung des Zwei-Raum-Problems mit Hilfe der Momentenmethode

Ausgangspunkt der weiteren Überlegungen ist ein Zwei-Raum-Problem, bei dem sich die beiden homogenen isotropen Räume I und II nur in der Öffnungsfläche F_A berühren (Abb. 3.1a). Sie sind bis auf diese Fläche F_A durch einen idealen Leiter begrenzt oder reichen ins Unendliche, wo alle Feldkomponenten die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung erfüllen. Im Raum I befinden sich eingeprägte Quellenverteilungen $\vec{J}^i$ und $\vec{M}^i$, Raum II wird ohne Einschränkung der Allgemeinheit als quellenfrei angenommen.

Nach dem Huygensschen Prinzip kann das ursprüngliche Zwei-Raum-Problem Abb. 3.1a in zwei Teilprobleme entsprechend Abbn. 3.1b und 3.1c zerlegt werden. Die Öffnungsfläche F_A wird dabei für beide Räume ideal leitend geschlossen. Um die dadurch bedingte Änderung des Feldes rückgängig zu machen, muß in ihrem Bereich die magnetische Oberflächenstromdichte

$$\vec{M}(\vec{r}') = -\vec{n}' \times \vec{E}(\vec{r}') \tag{3.16}$$

eingeprägt werden. Hierbei sind $\vec{E}(\vec{r}')$ die im Ausgangsproblem auf F_A herrschende, zunächst noch unbekannte, elektrische Feldstärke, $\vec{n}'$ der in Raum II zeigende Normaleneinheitsvektor im Quellsystem und $\vec{r}'$ der auf F_A endende Quellpunktsvektor. Im Raum I nach Abb. 3.1b wird das Feld von der eingeprägten Quellenverteilung $\vec{J}^i$, $\vec{M}^i$ und der äquivalenten Flächenstromdichte $-\vec{M}(\vec{r}')$ erzeugt, weil der

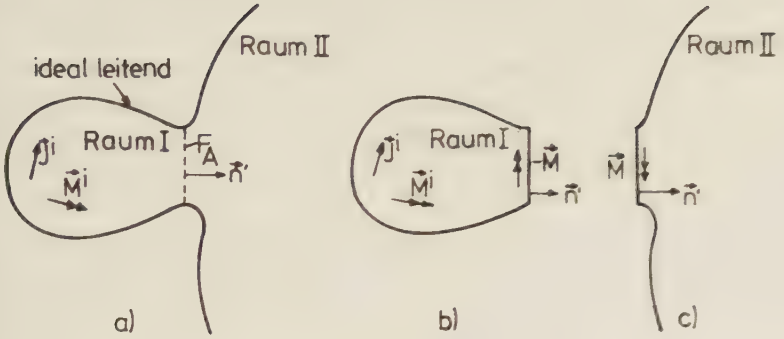


Abb. 3.1 Zwei-Raum-Problem
a) Ausgangsproblem,
b) äquivalente Darstellung für Raum I,
c) äquivalente Darstellung für Raum II.

Normalenvektor, der in den betrachteten Raum zeigt, $-\vec{n}'$ ist. Das Feld im Raum II nach Abb. 3.1c besitzt als Quelle allein die Flächenstromdichte $\vec{M}'(\vec{r}')$.

In den beiden Räumen ergeben sich die magnetischen Feldstärken $\vec{H}_I(\vec{r})$ und $\vec{H}_{II}(\vec{r})$ aus

$$\vec{H}_I = \vec{H}^i + \vec{H}_I(-\vec{M}) = \vec{H}^i - \vec{H}_I(\vec{M})$$

und

$$\vec{H}_{II} = \vec{H}_{II}(\vec{M}),$$

wobei $\vec{H}^i$ die von $\vec{J}^i$ und $\vec{M}^i$ erzeugte magnetische Feldstärke, $\vec{H}_I(\vec{M})$ und $\vec{H}_{II}(\vec{M})$ die aus der äquivalenten magnetischen Flächenstromdichte $\vec{M}$ nach Gl. (3.7b) berechneten magnetischen Feldstärken im jeweiligen Raumgebiet sind. Die Tangentialkomponenten der magnetischen Feldstärken beider Räume müssen in der Öffnungsfläche F_A wegen der Stetigkeit von $\vec{H}_{tan}$ gleich sein, d. h.

$$\vec{n} \times \vec{H}^i - \vec{n} \times \vec{H}_I(\vec{M}) = \vec{n} \times \vec{H}_{II}(\vec{M}). \qquad (3.17)$$

Dabei ist $\vec{n}$ der Normaleneinheitsvektor im Aufpunktsystem, der in Raum II

zeigt. Gl. (3.17) ist im Zusammenhang mit Gl. (3.16) eine lineare Operatorgleichung zur Bestimmung der unbekannten tangentialen elektrischen Feldstärke in der Öffnungsfläche. Hierbei handelt es sich um eine inhomogene Fredholmsche Integralgleichung erster Art, für die eine geschlossene Lösungsmöglichkeit nicht bekannt ist. Im folgenden wird daher eine Lösung mit Hilfe der Momentenmethode ermittelt, die sich für derartige Integralgleichungen als zweckmäßig erwiesen hat [39].

Mit Hilfe eines Satzes von Basis- (Entwicklungs-) Funktionen $\{\vec{M}_q;\ q = 1,2,\ldots Q\}$ läßt sich die äquivalente magnetische Flächenstromdichte $\vec{M}$ entwickeln in

$$\vec{M} = Z_{II} \sum_{q=1}^{Q} V_q \vec{M}_q, \tag{3.18}$$

wobei $Z_{II} = \sqrt{\mu_o \mu_{rII} / \varepsilon_o \varepsilon_{rII}}$ den Feldwellenwiderstand des Mediums im Raum II und V_q die noch unbekannten Entwicklungskoeffizienten bezeichnen. Setzt man Gl. (3.18) in Gl. (3.17) ein und benutzt die Linearitätseigenschaft der Operatoren, so erhält man:

$$Z_{II} \sum_{q=1}^{Q} V_q \vec{n} \times \vec{H}_I(\vec{M}_q) + Z_{II} \sum_{q=1}^{Q} V_q \vec{n} \times \vec{H}_{II}(\vec{M}_q) = \vec{n} \times \vec{H}^i. \tag{3.19}$$

Wählt man einen Satz von Gewichts- (Test-) Funktionen $\{\vec{U}_p;\ p = 1,2,\ldots P\}$ und bildet das Innere Produkt von Gl. (3.19) mit jeder dieser Testfunktionen gemäß der Definition

$$\langle \vec{\Phi}, \vec{\Psi} \rangle = \iint_F \vec{\Phi} \cdot \vec{\Psi}\, df, \tag{3.20}$$

so erhält man ein Gleichungssystem von P Gleichungen:

$$Z_{II} \sum_{q=1}^{Q} V_q \langle \vec{U}_p, \vec{n} \times \vec{H}_I(\vec{M}_q) \rangle + Z_{II} \sum_{q=1}^{Q} V_q \langle \vec{U}_p, \vec{n} \times \vec{H}_{II}(\vec{M}_q) \rangle = \langle \vec{U}_p, \vec{n} \times \vec{H}^i \rangle, \tag{3.21a}$$

$$p = 1,2,\ldots P$$

Mit $\vec{W}_p = -\vec{n} \times \vec{U}_p$ läßt sich Gl. (3.21a) auf die Form

$$Z_{II}\sum_{q=1}^{Q} V_q \langle \vec{W}_p, \vec{H}_I(\vec{M}_q)\rangle + Z_{II} \sum_{q=1}^{Q} V_q \langle \vec{W}_p, \vec{H}_{II}(\vec{M}_q)\rangle = \langle \vec{W}_p, \vec{H}^i\rangle, \qquad (3.21b)$$

$$p = 1,2,\ldots P$$

bringen.

Für die exakte Lösung von Gl. (3.21b) müssen Q und P unendlich groß sein, sowie die $\vec{M}_q$ und $\vec{W}_p$ je ein vollständiges Funktionensystem bilden. Die numerische Lösung mit Hilfe eines Großrechners ist natürlich nur für endliche Q und P möglich. Hier wird Q = P gewählt, so daß Gl. (3.21b) ein endliches quadratisches Gleichungssystem darstellt. Später wird noch überprüft, welche Werte P und Q sinnvollerweise haben sollten und wie gut die Approximation durch die endliche Zahl von Basis- und Gewichtsfunktionenist. Zur weiteren Auswertung wird abkürzend die Matrizenschreibweise benutzt:

$$[Z_{II}\langle \vec{W}_p, \vec{H}_I(\vec{M}_q)\rangle] = [T^I_{pq}] = \mathbf{T}^I, \qquad (3.22a)$$

$$[Z_{II}\langle \vec{W}_p, \vec{H}_{II}(\vec{M}_q)\rangle] = [T^{II}_{pq}] = \mathbf{T}^{II}, \qquad (3.22b)$$

$$[\langle \vec{W}_p, \vec{H}^i\rangle] = [I^i_p] = \mathbf{I}^i, \qquad (3.22c)$$

$$[V_q] = \mathbf{V}. \qquad (3.22d)$$

Damit läßt sich Gl. (3.21b) auf die Form

$$(\mathbf{T}^I + \mathbf{T}^{II})\,\mathbf{V} = \mathbf{I}^i \qquad (3.23)$$

bringen. Hierbei können

- der Spaltenvektor $\mathbf{I}^i$, der die Wirkung der eingeprägten Quellen $\vec{J}^i$ und $\vec{M}^i$ im Raum I auf die Öffnungsfläche F_A ausdrückt, als "Stromvektor",
- der Spaltenvektor $\mathbf{V}$, der die Koeffizienten der Basisfunktionsentwicklung enthält und somit das elektrische Feld auf F_A beschreibt, als "Spannungsvektor",
- die Matrizen $\mathbf{T}^I$ und $\mathbf{T}^{II}$, die den Zusammenhang zwischen magnetischer und elektrischer Feldstärke auf F_A angeben, als "Admittanzmatrizen"

interpretiert werden. Gl. (3.23) zeigt deutlich, daß die Matrizen $\mathbf{T}^I$ und $\mathbf{T}^{II}$, die die Geometrie- und Materialeigenschaften der beiden Räume enthalten, getrennt voneinander berechnet werden können und unabhängig von der Verteilung der ein-

geprägten Quellen sind. Mit Gl. (3.23) kann also eine Vielzahl von Zwei-Raum-Problemen behandelt werden, wie z. B. die Beugung an einer Blende, die Abstrahlung von einer UKW-Schlitzantenne, einer Hohlleitung oder eines Hornes. Die Lösung der Gl. (3.23) findet man durch Matrizeninversion

$$\mathbf{V} = (\mathbf{T}^{I} + \mathbf{T}^{II})^{-1}\, \mathbf{I}^{i}.$$

Aus dem Lösungsvektor $\mathbf{V}$ kann nach Gl. (3.18) die äquivalente magnetische Flächenstromdichte $\vec{M}$ auf F_A gewonnen und daraus nach Gln.(3.7a,b) das elektrische und magnetische Feld im gesamten Raum berechnet werden.

3.3.2 Berechnung der Admittanzmatrix für einen Halbraum

Der Raum II nach Abb. 3.1c sei von einer ebenen unendlich ausgedehnten ideal leitenden Fläche F_e begrenzt, die die Öffnungsfläche F_A enthält. Die magnetische Feldstärke im Raum II kann dann nach Gl. (3.9b) berechnet werden. Mit

$$\text{rot rot } \vec{\Pi}_m = (\text{grad div} - \Delta)\, \vec{\Pi}_m$$

und

$$\Delta\vec{\Pi}_m + k^2\vec{\Pi}_m = 0$$

erhält man

$$\vec{H}_{II}(\vec{M}) = \frac{2}{j\omega\mu_0\mu_{rII}} (k_{II}^2 + \text{grad div})\, \vec{\Pi}_m(\vec{r})$$

wobei

$$\vec{\Pi}_m(\vec{r}) = \iint_{F_A} \vec{M}(\vec{r}')\, G_0(\vec{r},\vec{r}')\, df'.$$

Da der Differentialoperator auf die Aufpunktkoordinaten wirkt, und die Integration sich über den Quellbereich erstreckt, folgt - Stetigkeit des Integranden vorausgesetzt -:

$$\vec{H}_{II}(\vec{M}) = \frac{2}{j\omega\mu_o\mu_{rII}} \{k_{II}^2 \vec{\Pi}_m(\vec{r}) + \text{grad} \iint_{F_A} \text{div}[\vec{M}(\vec{r}')\, G_o(\vec{r},\vec{r}')]\, df'\}.$$

$\vec{M}(\vec{r}')$ ist unabhängig von den Aufpunktkoordinaten, so daß

$$\text{div}[\vec{M}(\vec{r}')\, G_o(\vec{r},\vec{r}')] = \vec{M}(\vec{r}') \cdot \text{grad}\, G_o(\vec{r},\vec{r}') = -\vec{M}(\vec{r}') \cdot \text{grad}' G_o(\vec{r},\vec{r}')$$

$$= G_o(\vec{r},\vec{r}')\, \text{div}'\vec{M}(\vec{r}') - \text{div}'[\vec{M}(\vec{r}')\, G_o(\vec{r},\vec{r}')].$$

Dabei wirkt der Differentialoperator grad auf $\vec{r}$, grad' auf $\vec{r}'$. Berücksichtigt man noch, daß für die geschlossene Hüllfläche

$$\oiint_F \text{div}'[\vec{M}(\vec{r}')\, G_o(\vec{r},\vec{r}')]df' = 0$$

gilt [16], und beachtet die Überlegungen von S. 19 zur ebenen Randfläche, so erhält man für den Integraloperator $\vec{H}_{II}$:

$$\vec{H}_{II}(\vec{M}) = \frac{2}{j\omega\mu_o\mu_{rII}} \left[k_{II}^2 \iint_{F_A} \vec{M}(\vec{r}')\, G_o(\vec{r},\vec{r}')df' + \text{grad} \iint_{F_A} G_o(\vec{r},\vec{r}')\, \text{div}'\vec{M}(\vec{r}')\, df'\right]. \quad (3.24)$$

Setzt man Gl. (3.24) in Gl. (3.22b) ein und benutzt den für eine geschlossene Hüllfläche geltenden Zusammenhang [40]

$$\oiint_F \vec{W}_p(\vec{r})\, \text{grad}[\iint_{F_A} G_o(\vec{r},\vec{r}')\text{div}'\vec{M}(\vec{r}')df']df = -\oiint_F \text{div}\, \vec{W}_p(\vec{r})[\iint_{F_A} G_o(\vec{r},\vec{r}')\text{div}'\vec{M}(\vec{r}')df']df,$$

so ergibt sich für die Elemente der Admittanzmatrix, die im folgenden als "Halbraummatrix" bezeichnet wird,

$$T_{pq}^{HR} = Z_{II}\langle \vec{W}_p, \vec{H}_{II}(\vec{M}_q)\rangle = \frac{2}{jk_{II}} \{k^2 \iint_{F_A} \vec{W}_p(\vec{r})[\iint_{F_A} \vec{M}_q(\vec{r}')G_o(\vec{r},\vec{r}')df']df$$

$$- \iint_{F_A} \text{div}\, \vec{W}_p(\vec{r})[\iint_{F_A} G_o(\vec{r},\vec{r}')\, \text{div}'\vec{M}_q(\vec{r}')df']df\}. \quad (3.25)$$

Zur numerischen Auswertung müssen nun die Basis- und Gewichtsfunktionen so gewählt werden, daß sie der Geometrie angepaßt sind.

3.3.3 Berechnung der Admittanzmatrix für eine Hohlleitung

Die in Abb. 3.1b erläuterte äquivalente Darstellung des Raumes I ist in Abb. 3.2 auf den Fall einer zylindrischen Hohlleitung von beliebigem Querschnitt F_H angewandt. Dabei kann die Öffnungsfläche F_A auch kleiner als F_H sein, wenn z. B. eine Blende in F_A angeordnet ist. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird die Hohlleitung parallel zur z-Achse, F_A in die Ebene z = 0 gelegt. Das transversale elektrische Feld läßt sich stets als Überlagerung der transversalen Feldkomponenten $\vec{e}_i(x,y)e^{-j\beta_i z}$ der Eigenwellen beschreiben. Dabei sind die $\vec{e}_i$ so normiert, daß

$$\iint_{F_H} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \, df = \begin{cases} 0 \text{ für } i \neq j \\ 1 \text{ für } i = j \end{cases} \tag{3.26}$$

gilt. Damit kann auch das durch die eingeprägte Flächenstromdichte $\vec{M}$ in der Ebene z = 0 hervorgerufene transversale elektromagnetische Feld in der Form

$$\vec{E}_{tr}(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \, \vec{e}_i(x,y), \tag{3.27a}$$

$$\vec{H}_{tr}(x,y) = -\sum_{i=1}^{\infty} a_i \, Y_i \, \vec{u}_z \times \vec{e}_i(x,y) \tag{3.27b}$$

dargestellt werden, wobei Y_i die Feldwellenadmittanz der i-ten Eigenwelle ist.

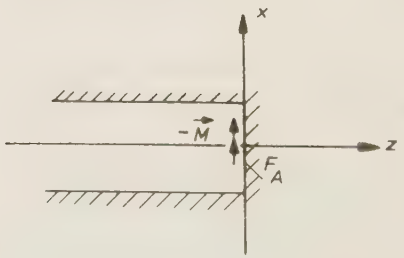


Abb. 3.2 Äquivalente Darstellung des Raumes I für den Fall einer zylindrischen Hohlleitung.

Zur Berechnung der gesuchten Matrixelemente T^{I}_{pq} in Gl. (3.22a) wird jede einzelne Basisfunktion von Gl. (3.18) nach den $\vec{e}_i$ entwickelt, d. h.

$$\vec{M}_q(x',y') = \sum_{i=1}^{\infty} A_{qi}\, \vec{u}_z \times \vec{e}_i(x',y').$$

Um die Entwicklungskoeffizienten A_{qi} zu bestimmen, multipliziert man beide Seiten dieser Gleichung mit $\vec{u}_z \times \vec{e}_j(x',y')$ und integriert über den Hohlleitungsquerschnitt:

$$\iint_{F_H} \vec{M}_q \cdot (\vec{u}_z \times \vec{e}_j)\, df' = \sum_{i=1}^{\infty} A_{qi} \iint_{F_H} (\vec{u}_z \times \vec{e}_i) \cdot (\vec{u}_z \times \vec{e}_j)\, df'.$$

Daraus folgt mit Gl. (3.26):

$$A_{qi} = \iint_{F_H} \vec{M}_q \cdot (\vec{u}_z \times \vec{e}_i)\, df' = \iint_{F_A} \vec{M}_q \cdot (\vec{u}_z \times \vec{e}_i)\, df'. \tag{3.28}$$

Die Elemente der Admittanzmatrix für eine Hohlleitung ergeben sich nun durch Kombination von Gln. (3.22a), (3.27b) und (3.28) zu

$$\begin{aligned} T^{Hl}_{pq} &= Z_{II} \iint_{F_A} \vec{W}_p(\vec{r}) \cdot \vec{H}_{tr,I}(\vec{M}_q)\, df \\ &= -Z_{II} \iint_{F_A} \vec{W}_p(\vec{r}) \cdot \Big[\sum_{i=1}^{\infty} A_{qi}\, Y_i\, \vec{u}_z \times \vec{e}_i(x,y) \Big]\, df. \end{aligned}$$

Mit der abkürzenden Schreibweise

$$B_{pi} = \iint_{F_A} \vec{W}_p(x,y) \cdot [\vec{u}_z \times \vec{e}_i(x,y)]\, df$$

erhält man schließlich

$$T^{Hl}_{pq} = -Z_{II} \sum_{i=1}^{\infty} A_{qi}\, Y_i\, B_{pi}. \tag{3.29}$$

Bei der numerischen Auswertung können natürlich nicht unendlich viele Eigenwellen berücksichtigt werden, i läuft daher nur bis zu einer endlichen, genügend großen Zahl I, so daß der Fehler bei der Auswertung von Gl. (3.29) in der Praxis unbedeutend ist. Im folgenden wird die Galerkinsche Methode benutzt, d. h. $\vec{M}_q = \vec{W}_q$, mit q = p = 1,2,...P, gesetzt. Damit vereinfacht sich die Auswertung von Gl. (3.29), da $A_{qi} = B_{qi}$ ist.

3.3.4 Berechnung der Admittanzmatrix für einen beliebig begrenzten Raum

Die endliche Wandstärke eines Hohlleitungsstrahlers oder ein an die Leitung angesetzter Schirm endlicher Größe (Abb. 3.3) können einen erheblichen Einfluß auf das Nah- und Fernfeld sowie die Kreuzpolarisation haben [41, 42]. Dieser läßt sich weder in den Verfahren ER, HR, EHR noch bei der Momentenlösung mit Hilfe der Admittanzmatrix des Halbraumes berücksichtigen. Für eine exakte Behandlung solcher Hohlleitungsstrahler nach dem in Abschnitt 3.3.1 beschriebenen Verfahren muß man die durch Gl. (3.22b) eingeführte Matrix $\mathbf{T}^{II}$ für einen entsprechend begrenzten Raum bestimmen. Versucht man dies über Gl. (3.7b), so steht man vor der schwierigen Aufgabe, die Greensche Dyade Γ_2 für eine recht

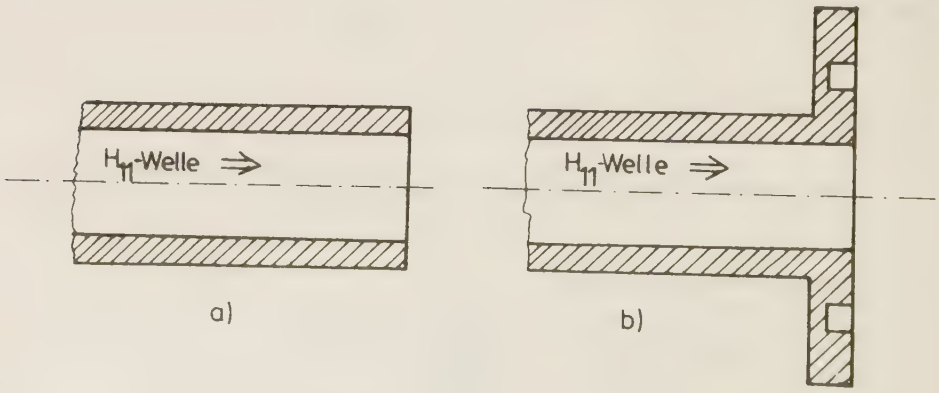


Abb. 3.3 Beispiel für Hohlleitungsstrahler
a) mit endlicher Wandstärke,
b) mit angesetztem Schirm endlicher Größe.

komplizierte Struktur angeben zu müssen. Hier wird daher zur Berechnung der Matrix $\mathbf{T}^{II}$ von Gln. (3.5a,b) ausgegangen.

In Abb. 3.4a ist die äquivalente Darstellung des Raumes II aus Abb. 3.1c dahingehend modifiziert, daß Raum II durch eine ideal leitende Fläche, die im Endlichen verläuft, abgegrenzt wurde. Auf F_A ist wie bisher die magnetische Flächenstromdichte $\vec{M}$ eingeprägt:

$$\vec{M}(\vec{r}') = \begin{cases} -\vec{n}' \times \vec{E}(\vec{r}') & \text{auf } F_A \\ 0 & \text{auf } F_B. \end{cases} \tag{3.30a}$$

Nach dem Huygensschen Prinzip hat man im Raum II das gleiche Feld, wenn der ideale Leiter durch die äquivalente elektrische Flächenstromdichte $\vec{J}$ ersetzt wird (Abb. 3.4b):

$$\vec{J}(\vec{r}') = \vec{n}' \times \vec{H}(\vec{r}') \qquad \text{auf } F_A \text{ und } F_B. \tag{3.30b}$$

$\vec{H}(\vec{r}')$ ist dabei die Feldstärke, die in Abb. 3.4a auf den vollkommen leitenden Flächen F_A und F_B durch $\vec{M}$ erzeugt wird. Aus den Flächenstromdichten $\vec{J}$ und $\vec{M}$

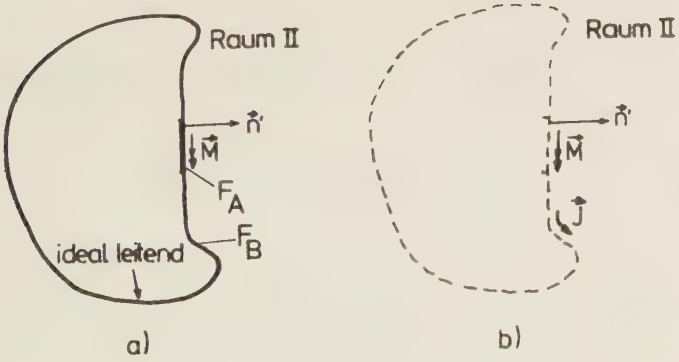


Abb. 3.4 Äquivalente Darstellung zur Bestimmung der Admittanzmatrix des Raumes II
a) über Gl. (3.7b),
b) über Gln. (3.5a,b).

berechnet sich das Feld im Raum II nach Gln. (3.5a,b).

Da diese Flächenstromdichten zunächst noch unbekannt sind, wird wieder eine Lösung mit Hilfe der Momentenmethode versucht. Dazu werden $\vec{M}(\vec{r}')$ und $\vec{J}(\vec{r}')$ nach Basisfunktionen $\{\vec{M}_q(\vec{r}');\ q = 1,2,\ldots Q\}$, die identisch sind mit denen aus Abschnitt 3.3.1, und $\{\vec{J}_\ell(\vec{r}');\ \ell = 1,2,\ldots L\}$ entwickelt:

$$\vec{M}(\vec{r}') = \begin{cases} Z_{II} \sum_{q=1}^{Q} V_q \vec{M}_q(\vec{r}') & \text{auf } F_A \\ 0 & \text{auf } F_B, \end{cases} \tag{3.31a}$$

$$\vec{J}(\vec{r}') = \sum_{\ell=1}^{L} I_\ell \vec{J}_\ell(\vec{r}') \qquad \text{auf } F_A \text{ und } F_B. \tag{3.31b}$$

Berechnet man nach Gl. (3.5a,b) die tangentialen Feldstärken auf F_A und F_B, so muß im Sinne der Momentenmethode näherungsweise gelten:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{auf } F_A: & Z_{II} \sum_{q=1}^{Q} V_q \vec{n} \times \vec{n} \times \vec{M}_q(\vec{r}) \\ \text{auf } F_B: & 0 \end{array}\right\} =$$

$$-Z_{II} \sum_{q=1}^{Q} V_q \vec{n} \times \mathrm{rot} \iint_{F_A} \vec{M}_q(\vec{r}') G_o(\vec{r},\vec{r}')\,df' + \frac{1}{j\omega\varepsilon_o\varepsilon_{rII}} \sum_{\ell=1}^{L} I_\ell \vec{n} \times \mathrm{rot}\ \mathrm{rot} \iint_{F_A+F_B} \vec{J}_\ell(\vec{r}') G_o(\vec{r},\vec{r}')\,df', \tag{3.32a}$$

$$\text{auf } F_A \text{ und } F_B: \quad -\sum_{\ell=1}^{L} I_\ell \vec{n} \times \vec{n} \times \vec{J}_\ell(\vec{r}) =$$

$$\sum_{\ell=1}^{L} I_\ell \vec{n} \times \mathrm{rot} \iint_{F_A+F_B} \vec{J}_\ell(\vec{r}') G_o(\vec{r},\vec{r}')\,df' + \frac{Z_{II}}{j\omega\mu_o\mu_{rII}} \sum_{q=1}^{Q} V_q \vec{n} \times \mathrm{rot}\ \mathrm{rot} \iint_{F_A} \vec{M}_q(\vec{r}') G_o(\vec{r},\vec{r}')\,df'. \tag{3.32b}$$

Man führt wieder Testfunktionen $\{\vec{U}_p(\vec{r});\ p = 1,2,\ldots \bar{P}\}$ und $\{\vec{W}_p(\vec{r});\ p = 1,2,\ldots \bar{P}\}$ ein, die für $p = 1,2,\ldots P < \bar{P}$ identisch mit denen aus Abschnitt 3.3.1 sind. Die größere Zahl $\bar{P} > P$ resultiert aus der jetzt größeren Fläche F_A+F_B und damit aus

den neu hinzugekommenen Basisfunktionen $\vec{J}_\ell$ (s. Gl. (3.31b)). Allgemein gilt wieder der Zusammenhang

$$\vec{W}_p = -\vec{n} \times \vec{U}_p \qquad \text{oder} \qquad \vec{U}_p = \vec{n} \times \vec{W}_p .$$

Bildet man nach Gl. (3.20) das Innere Produkt aus $\vec{W}_p$ und Gl. (3.32a) oder aus $\vec{U}_p$ und Gl. (3.32b), so erhält man zwei Gleichungssysteme mit je $\bar{P}$ Gleichungen:

$$\sum_{q=1}^{Q} V_q \langle \vec{U}_p(\vec{r}), \vec{n} \times \vec{M}_q(\vec{r}) \rangle = -\sum_{q=1}^{Q} V_q \langle \vec{U}_p(\vec{r}), \mathrm{rot} \iint_{F_A} \vec{M}_q(\vec{r}') G_o(\vec{r},\vec{r}')\, df' \rangle$$

$$+ \frac{1}{jk_{II}} \sum_{\ell=1}^{L} I_\ell \langle \vec{U}_p(\vec{r}), \mathrm{rot}\ \mathrm{rot} \iint_{F_A+F_B} \vec{J}_\ell(\vec{r}') G_o(\vec{r},\vec{r}')\, df' \rangle , \quad (3.33a)$$

$$-\sum_{\ell=1}^{L} I_\ell \langle \vec{W}_p(\vec{r}), \vec{n} \times \vec{J}_\ell(\vec{r}) \rangle = \sum_{\ell=1}^{L} I_\ell \langle \vec{W}_p(\vec{r}), \mathrm{rot} \iint_{F_A+F_B} \vec{J}_\ell(\vec{r}') G_o(\vec{r},\vec{r}')\, df' \rangle$$

$$+ \frac{1}{jk_{II}} \sum_{q=1}^{Q} V_q \langle \vec{W}_p(\vec{r}), \mathrm{rot}\ \mathrm{rot} \iint_{F_A} \vec{M}_q(\vec{r}') G_o(\vec{r},\vec{r}')\, df' \rangle . \quad (3.33b)$$

Zweckmäßigerweise geht man wieder zur Matrizenschreibweise über. Mit

$$[\langle \vec{U}_p(\vec{r}), -\mathrm{rot} \iint_{F_A} \vec{M}_q(\vec{r}') G_o(\vec{r},\vec{r}')\, df' \rangle] = [S^M_{pq}] = \mathbf{S}^M , \quad (3.34a)$$

$$[\frac{1}{jk_{II}} \langle \vec{U}_p(\vec{r}), \mathrm{rot}\ \mathrm{rot} \iint_{F_A+F_B} \vec{J}_\ell(\vec{r}') G_o(\vec{r},\vec{r}')\, df' \rangle] = [T^J_{p\ell}] = \mathbf{T}^J , \quad (3.34b)$$

$$[\langle \vec{W}_p(\vec{r}), \mathrm{rot} \iint_{F_A+F_B} \vec{J}_\ell(\vec{r}') G_o(\vec{r},\vec{r}')\, df' \rangle] = [S^J_{p\ell}] = \mathbf{S}^J , \quad (3.34c)$$

$$[\frac{1}{jk_{II}} \langle \vec{W}_p(\vec{r}), \mathrm{rot}\ \mathrm{rot} \iint_{F_A} \vec{M}_q(\vec{r}') G_o(\vec{r},\vec{r}')\, df' \rangle] = [T^M_{pq}] = \mathbf{T}^M , \quad (3.34d)$$

$$[\langle \vec{U}_p(\vec{r}), \vec{n} \times \vec{M}_q(\vec{r}) \rangle] = [D^M_{pq}] = \mathbf{D}^M , \quad (3.34e)$$

$$[\langle \vec{W}_p(\vec{r}), -\vec{n} \times \vec{J}_\ell(\vec{r}) \rangle] = [D^J_{p\ell}] = \mathbf{D}^J , \quad (3.34f)$$

$$[V_q] = \mathbf{V} , \quad (3.34g)$$

$$[I_\ell] = \mathbf{I} \quad (3.34h)$$

lassen sich Gln. (3.33a,b) in der Form

$$\mathbf{D}^M \mathbf{V} = \mathbf{S}^M \mathbf{V} + \mathbf{T}^J \mathbf{I}, \tag{3.35a}$$

$$\mathbf{D}^J \mathbf{I} = \mathbf{S}^J \mathbf{I} + \mathbf{T}^M \mathbf{V} \tag{3.35b}$$

schreiben. Wählt man $\overline{P} = L$ und löst Gln. (3.35a,b) nach $\mathbf{I}$ auf, so erhält man

$$\mathbf{I} = (\mathbf{T}^J)^{-1} (\mathbf{D}^M - \mathbf{S}^M) \mathbf{V}, \tag{3.36a}$$

$$\mathbf{I} = (\mathbf{D}^J - \mathbf{S}^J)^{-1} \mathbf{T}^M \mathbf{V}. \; ^*) \tag{3.36b}$$

Mit dem Integraloperator $\vec{H}_{II}(\vec{M}_q)$ in der Matrix $\mathbf{T}^{II}$ nach Gl. (3.22b) besteht über

$$\sum_{q=1}^{Q} V_q \langle \vec{W}_p, \vec{H}_{II}(\vec{M}_q) \rangle = \langle \vec{W}_p, -\vec{n} \times \vec{J} \rangle = -\sum_{\ell=1}^{L} I_\ell \langle \vec{W}_p, \vec{n} \times \vec{J}_\ell \rangle \qquad \text{für } p = 1,2,\ldots P$$

der Zusammenhang

$$\mathbf{T}^{II} \mathbf{V} = \mathbf{E}\, \mathbf{D}^J \mathbf{I}, \tag{3.37}$$

wobei die Elemente der Matrix E die Werte

$$E_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j, \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \text{mit } i = 1,2,\ldots P, \\ \quad\; j = 1,2,\ldots \overline{P}, \end{array} \tag{3.38}$$

haben. Die Admittanzmatrix von Raum II kann nunmehr durch Einsetzen von Gl. (3.36a) oder (3.36b) in Gl. (3.37) gewonnen werden:

$$\mathbf{T}^{w1} = \mathbf{E}\, \mathbf{D}^J (\mathbf{T}^J)^{-1} (\mathbf{D}^M - \mathbf{S}^M), \tag{3.39a}$$

$$\mathbf{T}^{w2} = \mathbf{E}\, \mathbf{D}^J (\mathbf{D}^J - \mathbf{S}^J)^{-1} \mathbf{T}^M. \tag{3.39b}$$

---

*) Gln. (3.36a,b) können auch als Lösung eines Streuproblems an einem ideal leitenden Körper für die Quellenverteilung $\mathbf{V}$ im Sinne der EFIE (electric field integral equation) und MFIE (magnetic field integral equation) [43] interpretiert werden.

$\mathbf{T}^{w1}$ und $\mathbf{T}^{w2}$ sind Matrizen mit P Zeilen und Q Spalten. Um sie in Gl. (3.23) einsetzen zu können, muß P = Q gewählt werden.

Wie numerische Berechnungen zeigen, entarten die Lösungen mit Hilfe der Matrizen $\mathbf{T}^{w1}$ und $\mathbf{T}^{w2}$ in der Nähe von "inneren Resonanzfrequenzen". *) Es gibt verschiedene Vorschläge, dies zu beheben [44 - 48]. Im folgenden wird mit Hilfe des Verfahrens der "kombinierten Quellenverteilung" nach Harrington [45] eine Matrix ermittelt, die die genannten Schwierigkeiten vermeidet. Anstelle der äquivalenten Flächenstromdichten $\vec{J}$ und $\vec{M}$ nach Abb. 3.4b und Gln. (3.30a,b) wird auf den Flächen F_A und F_B eine "kombinierte Quellenverteilung" $\vec{C}$ eingeführt, die im Raum II das gleiche Feld bewirkt. Die kombinierten Quellen bestehen aus einer fiktiven elektrischen Flächenstromdichte $\vec{J}_c$ und einer fiktiven magnetischen Flächenstromdichte $\vec{M}_c$, für die der Zusammenhang

$$\vec{M}_c(\vec{r}') = Z_{II}\, \vec{n}' \times \vec{J}_c(\vec{r}') \qquad \text{auf } F_A \text{ und } F_B \tag{3.40}$$

gelten soll. Mit Hilfe der Basisfunktionen $\{\vec{C}_q;\ q = 1,2,\ldots\bar{Q}\}$ kann man die kombinierten Flächenstromdichten entwickeln in

$$\vec{M}_c(\vec{r}') = Z_{II} \sum_{q=1}^{\bar{Q}} X_q\, \vec{n}' \times \vec{C}_q, \tag{3.41a}$$

$$\vec{J}_c(\vec{r}') = \sum_{q=1}^{\bar{Q}} X_q\, \vec{C}_q. \tag{3.41b}$$

Berechnet man nach Gln. (3.5a,b) die tangentialen Komponenten der Feldstärken auf F_A und F_B und führt wieder die Testfunktionen $\vec{U}_p$ und $\vec{W}_p$ entsprechend Gln. (3.33a,b) ein, so erhält man in Matrizenschreibweise:

$$\mathbf{D}^M\, \mathbf{V} = (\mathbf{S}^X + \mathbf{T}^C)\, \mathbf{C}, \tag{3.42a}$$

$$\mathbf{D}^J\, \mathbf{I} = (\mathbf{S}^C + \mathbf{T}^X)\, \mathbf{C}. \tag{3.42b}$$

Außer den bereits oben eingeführten Matrizen bedeuten:

---

*) Die "inneren Resonanzfrequenzen" sind die Eigenfrequenzen des Hohlraumes, der von den Flächen F_A und F_B eingeschlossen wird.

$$[\langle \vec{U}_p(\vec{r}), -\mathrm{rot} \iint_{F_A+F_B} \vec{n}' \times \vec{C}_q(\vec{r}') G_o(\vec{r},\vec{r}')\, df' \rangle] = [S^X_{pq}] = \mathbf{S}^X, \tag{3.43a}$$

$$[\frac{1}{jk_{II}} \langle \vec{U}_p(\vec{r}), \mathrm{rot}\ \mathrm{rot} \iint_{F_A+F_B} \vec{C}_q(\vec{r}') G_o(\vec{r},\vec{r}')\, df' \rangle] = [T^C_{pq}] = \mathbf{T}^C, \tag{3.43b}$$

$$[\langle \vec{W}_p(\vec{r}), \mathrm{rot} \iint_{F_A+F_B} \vec{C}_q(\vec{r}') G_o(\vec{r},\vec{r}')\, df' \rangle] = [S^C_{pq}] = \mathbf{S}^C, \tag{3.43c}$$

$$[\frac{1}{jk_{II}} \langle \vec{W}_p(\vec{r}), \mathrm{rot}\ \mathrm{rot} \iint_{F_A+F_B} \vec{n}' \times \vec{C}_q(\vec{r}') G_o(\vec{r},\vec{r}')\, df' \rangle] = [T^X_{pq}] = \mathbf{T}^X, \tag{3.43d}$$

$$[X_q] = \mathbf{C}. \tag{3.43e}$$

Löst man Gl. (3.42a) nach $\mathbf{C}$ auf und setzt sie in Gl. (3.42b) ein, so erhält man für $\mathbf{I}$:

$$\mathbf{I} = (\mathbf{D}^J)^{-1} (\mathbf{S}^C + \mathbf{T}^X) (\mathbf{S}^X + \mathbf{T}^C)^{-1} \mathbf{D}^M \mathbf{V}. \tag{3.44}$$

Mit Hilfe von Gl. (3.37) findet man für die Admittanzmatrix des Raumes II:

$$\mathbf{T}^{W3} = \mathbf{E} (\mathbf{S}^C + \mathbf{T}^X) (\mathbf{S}^X + \mathbf{T}^C)^{-1} \mathbf{D}^M. \tag{3.45}$$

Die Matrizen $\mathbf{T}^{HR}$, $\mathbf{T}^J$, $\mathbf{T}^M$, $\mathbf{T}^C$ und $\mathbf{T}^X$ können auf die gleiche Weise berechnet werden, sie unterscheiden sich lediglich in Basis- und Gewichtsfunktionen. Ebenso sind die Matrizen $\mathbf{S}^M$, $\mathbf{S}^J$, $\mathbf{S}^X$ und $\mathbf{S}^C$ nach einem einheitlichen Prinzip auswertbar. Während die Integrale der T-Matrizen unmittelbar numerisch berechnet werden können, müssen für die Integrale der S-Matrizen zunächst die Singularitäten abgespaltet und die Cauchyschen Hauptwerte ermittelt werden. Die hierzu erforderlichen Überlegungen sind im Anhang 6.2 dargestellt.

3.3.5 Lösung des Drei-Raum-Problems mit Hilfe der Momentenmethode

Häufig wird zur Erzielung bestimmter Strahlungseigenschaften in oder nahe der Öffnungsfläche eines Hohlleitungsstrahlers ein besonders geformter oder mit Dielektrikum ausgefüllter Übergang eingefügt. Das sich daraus ergebende Abstrahlungsproblem kann man als Drei-Raum-Problem nach der Momentenmethode

behandeln. Im folgenden werden für zwei Beispiele von Drei-Raum-Problemen die Lösungswege zur Berechnung des Strahlungsfeldes dargestellt.

(1) Drei-Raum-Problem, für dessen Raumbereiche die Greenschen Dyaden analytisch angebbar sind

Betrachtet man eine Anordnung von drei homogenen isotropen Räumen, die ideal leitend begrenzt und durch jeweils eine Öffnungsfläche mit dem Nachbarraum verbunden sind (Abb. 3.5a), so kann dieses Drei-Raum-Problem nach dem Huygensschen

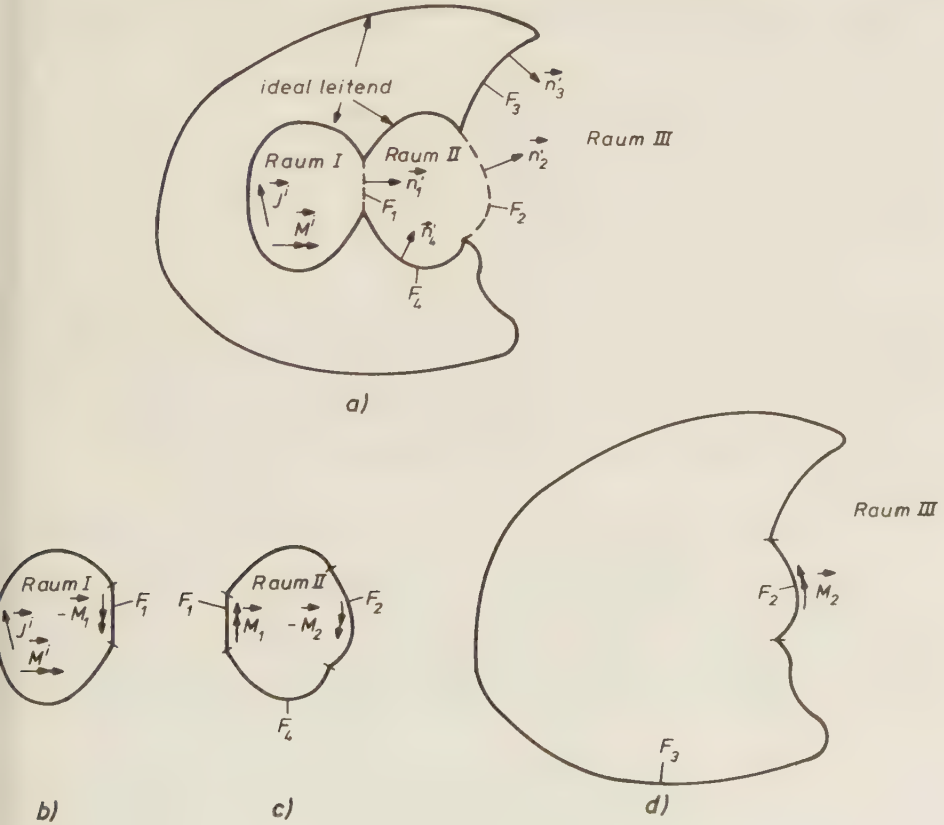


Abb. 3.5 Drei-Raum-Problem
a) Ausgangsproblem,
b) - d) äquivalente Darstellungen für die Räume I, II und III.

Prinzip in drei äquivalente Teilprobleme nach Abbn. 3.5b-d zerlegt werden. Dabei werden die Öffnungsflächen wie vorher ideal leitend geschlossen. In ihrem Bereich müssen dann wieder äquivalente magnetische Flächenstromdichten

$$\vec{M}_1(\vec{r}') = -\vec{n}_1' \times \vec{E}(\vec{r}') \qquad \text{auf } F_1,$$

$$\vec{M}_2(\vec{r}') = -\vec{n}_2' \times \vec{E}(\vec{r}') \qquad \text{auf } F_2,$$

eingeführt werden. Setzt man voraus, daß nur im Raum I eingeprägte Quellen $\vec{J}^i$ und $\vec{M}^i$ vorhanden sind, so berechnen sich die magnetischen Feldstärken in den einzelnen Räumen zu:

$$\vec{H}_I = \vec{H}^i + \vec{H}_I(-\vec{M}_1) = \vec{H}^i - \vec{H}_I(\vec{M}_1),$$

$$\vec{H}_{II} = \vec{H}_{II}(\vec{M}_1,-\vec{M}_2) = \vec{H}_{II,1}(\vec{M}_1) - \vec{H}_{II,2}(\vec{M}_2),$$

$$\vec{H}_{III} = \vec{H}_{III}(\vec{M}_2).$$

Dabei bezeichnen $\vec{H}^i$ die von $\vec{J}^i$ und $\vec{M}^i$ erzeugte magnetische Feldstärke, $\vec{H}_I(\vec{M}_1)$, $\vec{H}_{II}(\vec{M}_1,-\vec{M}_2)$ und $\vec{H}_{III}(\vec{M}_2)$ die magnetischen Feldstärken in den jeweiligen Räumen, die nach Gl. (3.7b) aus den äquivalenten magnetischen Flächenstromdichten berechenbar sind. Die tangentialen Komponenten der magnetischen Feldstärke in benachbarten Raumgebieten müssen in der Öffnungsfläche stetig sein, also:

$$\vec{n}_1 \times \vec{H}^i - \vec{n}_1 \times \vec{H}_I(\vec{M}_1) = \vec{n}_1 \times \vec{H}_{II,1}(\vec{M}_1) - \vec{n}_1 \times \vec{H}_{II,2}(\vec{M}_2), \qquad (3.46a)$$

$$\vec{n}_2 \times \vec{H}_{II,1}(\vec{M}_1) - \vec{n}_2 \times \vec{H}_{II,2}(\vec{M}_2) = \vec{n}_2 \times \vec{H}_{III}(\vec{M}_2). \qquad (3.46b)$$

Führt man analog zu Gl. (3.18) eine Entwicklung der äquivalenten magnetischen Flächenstromdichten $\vec{M}_1$ und $\vec{M}_2$ mit Hilfe zweier Sätze von Basisfunktionen $\{\vec{M}_{1,q};\ q = 1,2,\ldots Q_1\}$ und $\{\vec{M}_{2,q};\ q = 1,2,\ldots Q_2\}$ ein,

$$\vec{M}_\nu = Z_{II} \sum_{q=1}^{Q_\nu} V_{\nu,q}\, \vec{M}_{\nu,q}, \qquad \nu = 1 \text{ oder } 2, \qquad (3.47)$$

wählt zwei Sätze von Gewichtsfunktionen $\{\vec{U}_{1,p};\ p = 1,2,\ldots P_1\}$, $\{\vec{U}_{2,p};\ p = 1,2,\ldots P_2\}$ und bildet die Inneren Produkte der Gewichtsfunktionen

mit Gln. (3.46a,b) so erhält man ein dem Gleichungssystem (3.21a) entsprechendes System mit $(P_1 + P_2)$ Gleichungen. Dieses läßt sich mit

$$\vec{W}_{\mu,p} = -\vec{n}_\mu \times \vec{U}_{\mu,p}, \qquad \mu = 1 \text{ oder } 2,$$

und der Matrizenschreibweise

$$[Z_{II}<\vec{W}_{1,p},\vec{H}_I(\vec{M}_{1,q})>] = [T^I_{pq}] = \mathbf{T}^I, \tag{3.48a}$$

$$[Z_{II}<\vec{W}_{2,p},\vec{H}_{III}(\vec{M}_{2,q})>] = [T^{III}_{pq}] = \mathbf{T}^{III}, \tag{3.48b}$$

$$[Z_{II}<\vec{W}_{\mu,p},\vec{H}_{II,\nu}(\vec{M}_{\nu,q})>] = [T^{II,\mu,\nu}_{pq}] = \mathbf{T}^{II,\mu,\nu} \tag{3.48c}$$

$$[<\vec{W}_{1,p},\vec{H}^i>] = [I^i_p] = \mathbf{I}^i, \tag{3.48d}$$

$$[V_{\nu,q}] = \mathbf{V}, \tag{3.48e}$$

mit $\nu, \mu = 1, 2,$

in der Form

$$\mathbf{I}^i - \mathbf{T}^I \mathbf{V}_1 = \mathbf{T}^{II,1,1} \mathbf{V}_1 - \mathbf{T}^{II,1,2} \mathbf{V}_2, \tag{3.49a}$$

$$\mathbf{T}^{II,2,1} \mathbf{V}_1 - \mathbf{T}^{II,2,2} \mathbf{V}_2 = \mathbf{T}^{III} \mathbf{V}_2 \tag{3.49b}$$

darstellen. Bei seiner Lösung mit Hilfe der Momentenmethode wird $P_1 = Q_1$ und $P_2 = Q_2$ gewählt. Die beiden Gleichungssysteme (3.49a,b) können als e i n System mit $(P_1 + P_2) = (Q_1 + Q_2)$ Gleichungen und Unbekannten aufgefaßt und durch Matrizeninversion gelöst werden. Es ist aber auch möglich, Gln. (3.49b) nach $\mathbf{V}_1$ aufzulösen, in Gln. (3.49a) einzusetzen und so ein in der Ordnung reduziertes System zu erhalten, aus dem $\mathbf{V}_2$ bestimmt werden kann:

$$\mathbf{V}_2 = [(\mathbf{T}^I + \mathbf{T}^{II,1,1})(\mathbf{T}^{II,2,1})^{-1}(\mathbf{T}^{III} + \mathbf{T}^{II,2,2}) - \mathbf{T}^{II,1,2}]^{-1} \mathbf{I}^i \tag{3.50}$$

Aus $\mathbf{V}_2$ berechnet sich mit Hilfe von Gln. (3.7a,b) das Feld im gesamten Raum III.

Voraussetzung für die Durchführbarkeit dieses Lösungsverfahrens ist, daß die Greenschen Dyaden Γ_2 in Gl. (3.7b) für alle drei Räume analytisch angegeben

werden können. Wenn dies nicht möglich ist, kann - wie im folgenden dargestellt wird - ein modifizierter Ansatz verwendet werden.

(2) Drei-Raum-Problem, für dessen Raumbereiche die Greenschen Dyaden nicht analytisch angebbar sind

Vereinfachend wird angenommen, daß die Greenschen Dyaden Γ_2 nur für die Räume II und III nicht bekannt sind. Man geht dann bei der Behandlung dieser beiden Räume nicht von Gl. (3.7b) sondern von Gln. (3.5a,b) aus. Anstelle der ideal leitenden Flächen werden wieder äquivalente elektrische Flächenstromdichten derart eingeführt, daß die Felder in den Räumen II und III der Abbn. 3.6a,b identisch mit denen der Abbn. 3.5c,d sind. Damit sind auf den Flächen F_1 bis F_4 zusätzlich elektrische Flächenstromdichten

$$\vec{J}_\nu(\vec{r}') = \vec{n}'_\nu \times \vec{H}(\vec{r}'), \qquad \text{mit } \nu = 1, 2, 3, 4,$$

zu berücksichtigen. Später soll als spezielles Drei-Raum-Problem nur der dielek-

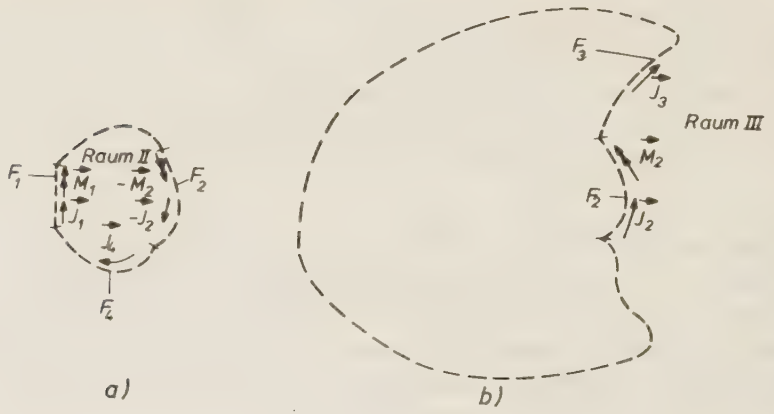


Abb. 3.6 Äquivalente Darstellung zur Behandlung des Drei-Raum-Problems über Gln. (3.5a,b)
a) für Raum II,
b) für Raum III.

trische Strahler behandelt werden. Er entsteht aus dem allgemeinen Problem, wenn F_2 unmittelbar an F_1 anschließt, also $F_4 = 0$ ist. Zur Vereinfachung der folgenden Ableitungen wird dieser Sonderfall von Anfang an betrachtet, es treten dann nur die Flächenstromdichten $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$, $\vec{J}_1$, $\vec{J}_2$ und $\vec{J}_3$ auf.

Versucht wird wieder eine Lösung mit Hilfe der Momentenmethode wie in Abschnitt 3.3.4. Mit den Entwicklungen

$$\vec{M}_\nu = Z_{II} \sum_{q=1}^{Q_\nu} V_{\nu,q}\, \vec{M}_{\nu,q}, \qquad \nu = 1, 2,$$

$$\vec{J}_\nu = \sum_{\ell=1}^{L_\nu} I_{\nu,\ell}\, \vec{J}_{\nu,\ell}, \qquad \nu = 1, 2, 3,$$

und den Gewichtsfunktionen $\{\vec{U}_{\mu,p};\ p = 1,2,\ldots P_\mu\}$ sowie $\vec{W}_{\mu,p} = -\vec{n}_\mu \times \vec{U}_{\mu,p}$, mit $\mu = 1, 2, 3$, lauten die Gln. (3.34) entsprechenden Matrizen:

$$\left.\begin{aligned}
&[\langle \vec{U}_{\mu,p}(\vec{r}), -\mathrm{rot}\iint_{F_\nu} \vec{M}_{\nu,q}(\vec{r}')G_o^{II}(\vec{r},\vec{r}')\,df'\rangle] = [S_{pq}^{MII,\mu,\nu}] = \mathbf{S}^{MII,\mu,\nu},\\
&[\frac{1}{jk_{II}}\langle \vec{U}_{\mu,p}(\vec{r}), \mathrm{rot\ rot}\iint_{F_\nu} \vec{J}_{\nu,\ell}(\vec{r}')G_o^{II}(\vec{r},\vec{r}')\,df'\rangle] = [T_{p\ell}^{JII,\mu,\nu}] = \mathbf{T}^{JII,\mu,\nu},\\
&[\langle \vec{W}_{\mu,p}(\vec{r}), \mathrm{rot}\iint_{F_\nu} \vec{J}_{\nu,\ell}(\vec{r}')G_o^{II}(\vec{r},\vec{r}')\,df'\rangle] = [S_{p\ell}^{JII,\mu,\nu}] = \mathbf{S}^{JII,\mu,\nu},\\
&[\frac{1}{jk_{II}}\langle \vec{W}_{\mu,p}(\vec{r}), \mathrm{rot\ rot}\iint_{F_\nu} \vec{M}_{\nu,q}(\vec{r}')G_o^{II}(\vec{r},\vec{r}')\,df'\rangle] = [T_{pq}^{MII,\mu,\nu}] = \mathbf{T}^{MII,\mu,\nu},
\end{aligned}\right\} \mu,\nu = 1, 2,$$

$$\left.\begin{aligned}
&[\langle \vec{U}_{\mu,p}(\vec{r}), -\mathrm{rot}\iint_{F_\nu} \vec{M}_{\nu,q}(\vec{r}')G_o^{III}(\vec{r},\vec{r}')\,df'\rangle] = [S_{pq}^{MIII,\mu,\nu}] = \mathbf{S}^{MIII,\mu,\nu},\\
&[\frac{Z_{II}}{Z_{III}}\frac{1}{jk_{III}}\langle \vec{U}_{\mu,p}(\vec{r}), \mathrm{rot\ rot}\iint_{F_\nu} \vec{J}_{\nu,\ell}(\vec{r}')G_o^{III}(\vec{r},\vec{r}')\,df'\rangle] = [T_{p\ell}^{JIII,\mu,\nu}] = \mathbf{T}^{JIII,\mu,\nu},\\
&[\langle \vec{W}_{\mu,p}(\vec{r}), \mathrm{rot}\iint_{F_\nu} \vec{J}_{\nu,\ell}(\vec{r}')G_o^{III}(\vec{r},\vec{r}')\,df'\rangle] = [S_{p\ell}^{JIII,\mu,\nu}] = \mathbf{S}^{JIII,\mu,\nu},
\end{aligned}\right\} \mu,\nu = 2, 3,$$

(3.51a-g)

$$[\frac{Z_{II}}{Z_{III}}\frac{1}{jk_{III}}<\vec{W}_{\mu,p}(\vec{r}),\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\iint_{F_\nu}\vec{M}_{\nu,q}(\vec{r}')G_o^{III}(\vec{r},\vec{r}')df'>]=[T_{pq}^{MIII,\mu,\nu}] = \mathbf{T}^{MIII,\mu,\nu},$$
$$\mu,\nu = 2, 3,$$

$$[<\vec{U}_{\mu,p}(\vec{r}),\vec{n}_\mu \times \vec{M}_{\mu,q}(\vec{r})>] = [D_{pq}^{M\mu}] = \mathbf{D}^{M\mu},\ \mu = 1, 2,$$

$$[<\vec{W}_{\mu,p}(\vec{r}),-\vec{n}_\mu \times \vec{J}_{\mu,\ell}(\vec{r})>] = [D_{p\ell}^{J\mu}] = \mathbf{D}^{J\mu},\ \mu = 1, 2, 3,$$

$$[V_{\nu,q}] = \mathbf{V}_\nu,\quad \nu = 1, 2,$$

$$[I_{\nu,\ell}] = \mathbf{I}_\nu,\quad \nu = 1, 2, 3,$$

$$[0] = \mathbf{0}$$

(3.51h-m)

und mit $\mathbf{T}^I$ nach Gl. (3.48a) das Gleichungssystem (3.35) entsprechende System:

$$\mathbf{D}^{M2}\mathbf{V}_2 = \mathbf{S}^{MIII,2,2}\mathbf{V}_2 + \mathbf{T}^{JIII,2,2}\mathbf{I}_2 + \mathbf{T}^{JIII,2,3}\mathbf{I}_3, \tag{3.52a}$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{S}^{MIII,3,2}\mathbf{V}_2 + \mathbf{T}^{JIII,3,2}\mathbf{I}_2 + \mathbf{T}^{JIII,3,3}\mathbf{I}_3, \tag{3.52b}$$

$$\mathbf{D}^{J2}\mathbf{I}_2 = \mathbf{S}^{JIII,2,2}\mathbf{I}_2 + \mathbf{S}^{JIII,2,3}\mathbf{I}_3 + \mathbf{T}^{MIII,2,2}\mathbf{V}_2, \tag{3.52c}$$

$$\mathbf{D}^{J3}\mathbf{I}_3 = \mathbf{S}^{JIII,3,2}\mathbf{I}_2 + \mathbf{S}^{JIII,3,3}\mathbf{I}_3 + \mathbf{T}^{MIII,3,2}\mathbf{V}_2, \tag{3.52d}$$

$$\mathbf{D}^{M1}\mathbf{V}_1 = -\mathbf{S}^{MII,1,2}\mathbf{V}_2 + \mathbf{S}^{MII,1,1}\mathbf{V}_1 - \mathbf{T}^{JII,1,2}\mathbf{I}_2 + \mathbf{T}^{JII,1,1}\mathbf{I}_1, \tag{3.52e}$$

$$-\mathbf{D}^{M2}\mathbf{V}_2 = -\mathbf{S}^{MII,2,2}\mathbf{V}_2 + \mathbf{S}^{MII,2,1}\mathbf{V}_1 - \mathbf{T}^{JII,2,2}\mathbf{I}_2 + \mathbf{T}^{JII,2,1}\mathbf{I}_1, \tag{3.52f}$$

$$\mathbf{D}^{J1}\mathbf{I}_1 = -\mathbf{S}^{JII,1,2}\mathbf{I}_2 + \mathbf{S}^{JII,1,1}\mathbf{I}_1 - \mathbf{T}^{MII,1,2}\mathbf{V}_2 + \mathbf{T}^{MII,1,1}\mathbf{V}_1, \tag{3.52g}$$

$$-\mathbf{D}^{J2}\mathbf{I}_2 = -\mathbf{S}^{JII,2,2}\mathbf{I}_2 + \mathbf{S}^{JII,2,1}\mathbf{I}_1 - \mathbf{T}^{MII,2,2}\mathbf{V}_2 + \mathbf{T}^{MII,2,1}\mathbf{V}_1, \tag{3.52h}$$

$$\mathbf{D}^{J1}\mathbf{I}_1 = -\mathbf{T}^I\mathbf{V}_1 + \mathbf{I}^i. \tag{3.52i}$$

Dabei repräsentieren die Beziehungen (3.52e,g,i) je P_1, (3.52a,c,f,h) je P_2 und (3.52b,d) je P_3 Gleichungen, so daß man insgesamt $(3P_1 + 4P_2 + 2P_3)$ Glei-

chungen zur Verfügung hat. Wählt man $P_1 = Q_1 = L_1$, $P_2 = Q_2 = L_2$ und $P_3 = L_3$, dann müssen $(2P_1 + 2P_2 + P_3)$ unbekannte Entwicklungskoeffizienten bestimmt werden. Dazu benötigt man ebensoviele linear unabhängige Gleichungen. Gln. (3.52c,d,g,h,i) oder Gln. (3.52a,b,e,f,i) stellen jeweils ein vollständiges Gleichungssystem dar. Beide besitzen jedoch den Nachteil, daß sie bei inneren Resonanzfrequenzen - ähnlich wie Gln. (3.38a,b) - entarten. Dieser Mangel kann durch die Verwendung bestimmter Kombinationen von Gln. (3.52a-i) behoben werden. Ein stabiles, eindeutig lösbares Gleichungssystem erhält man z. B. mit

Gl. (3.52b) + α Gl. (3.52d),
Gl. (3.52a) + β Gl. (3.52f),
Gl. (3.52c) + γ Gl. (3.52h),
Gl. (3.52g) und
Gl. (3.52i).

Die Koeffizienten α, β und γ sind zwar in gewissen Grenzen frei wählbar (α und $\beta\gamma^*$ müssen jeweils reell und positiv sein [46]), ihre numerischen Werte bestimmen indessen die Genauigkeit des Verfahrens. Im einfachsten Fall könnte man $\alpha = \beta = \gamma = 1$ setzen. Bei stark unterschiedlichen verlustfreien Medien liefert $\alpha = 1$, $\beta = -\varepsilon_{rII}/\varepsilon_{rIII}$, $\gamma = -\mu_{rII}/\mu_{rIII}$ bessere numerische Ergebnisse.

3.3.6 Überlegungen zur Genauigkeit der Momentenlösung

Seitdem es leistungsfähige Großrechenanlagen gibt, ist die Momentenmethode ein häufig eingesetztes Hilfsmittel zur Behandlung von Feldproblemen geworden. Es gibt jedoch bis heute kein allgemeingültiges analytisches Kriterium, das von vornherein eine realistische Fehlerabschätzung für Momentenlösungen erlaubt. Eine Momentenlösung kann selbst bei günstiger Formulierung des Problems aus verschiedenen Gründen fehlerbehaftet sein. Die wichtigsten sind:

- die Operatoren müssen oft approximiert werden,
- endliche Basisfunktionsentwicklungen beschreiben die exakte Lösung nur angenähert, und
- bei der Rechnung mit Matrizen auf einem Computer können erhebliche Rundungsfehler auftreten.

Besondere Bedeutung kommt der Wahl von Basis- und Gewichtsfunktionen zu [39, 68]. In der vorliegenden Arbeit wurde die Methode von Galerkin benutzt, d. h. Basis- und Gewichtsfunktionen wurden gleich gewählt. Gegenüber dem einfacheren

Point-Matching-Verfahren führt dieser Ansatz im allgemeinen zu einer aufwendigeren Berechnung der Matrixelemente, ermöglicht aber kleinere Gleichungssysteme bei gleicher Lösungsgenauigkeit. Als angenehm erweist sich hier zudem, daß die numerische Auswertung von Gln. (3.25) und (3.29) erheblich vereinfacht wird. Bei der Wahl der Basisfunktionen kommt es darauf an, diese einerseits an das physikalische Problem möglichst gut anzupassen, andererseits den Aufwand für die Berechnung der Matrixelemente gering zu halten. Als brauchbarer Kompromiß hat sich, wie verschiedene Untersuchungen zeigen [39, 40, 68], die Verwendung von Puls- und Dreiecksfunktionen nach Abb. 3.7 erwiesen. Beide Funktionen gehören zur Gruppe der Teilbereichsfunktionen, die den Ganzbereichsfunktionen wegen deren starker Neigung zu oszillierenden Lösungen im allgemeinen überlegen sind [68]. Dreiecksfunktionen liefern eine stetige Ergebnisfunktion und sind damit an eine Vielzahl von Problemen flexibel anpaßbar. Meistens kommt man mit einer relativ geringen Anzahl von Dreiecks-Basisfunktionen aus. Bei der Entwicklung nach Dreiecksfunktionen überlappen sich benachbarte Dreiecke, die zugehörigen Funktionen sind also nicht orthogonal zueinander, sondern "verkoppelt". Dies führt, wie Berechnungen im Rahmen dieser Arbeit gezeigt haben, bei kleinen

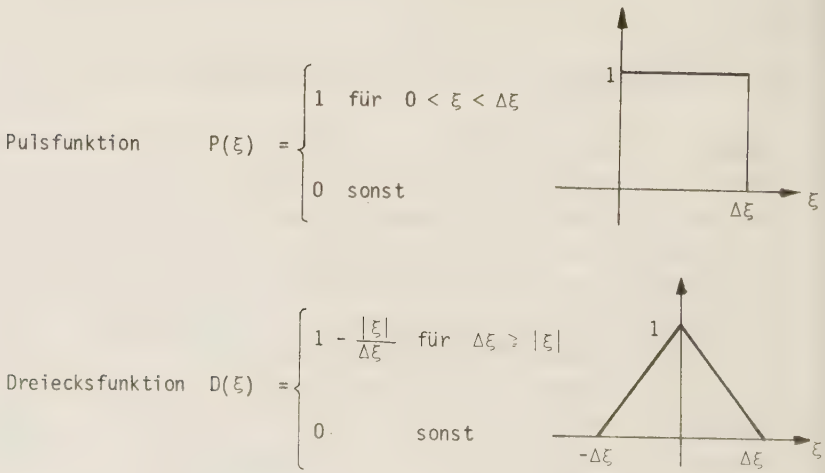


Abb. 3.7 Definition von Puls- und Dreiecksfunktionen.

Öffnungen (lineare Abmessungen < 0,2 λ) des Zwei-Raum-Problems dazu, daß das Gleichungssystem schlecht konditioniert ist, und die Ergebnisse daher mit großen Fehlern behaftet sind. Für den Fall kleiner Öffnungen erwies sich der Einsatz der einfacheren Pulsfunktionen als besser geeignet.

Es gibt mehrere Möglichkeiten im nachhinein die Brauchbarkeit der Momentenlösung einer Integralgleichung zu überprüfen:

a) Vergleich mit der analytischen Lösung

Für die meisten in der Praxis bedeutsamen Strukturen existiert eine analytische Lösung nicht oder aber ihre numerische Auswertung ist so aufwendig, daß eine systematische Parametervariation nicht lohnend ist. Im Rahmen dieser Arbeit konnte daher nur für eine kreisförmige Öffnung im unendlich ausgedehnten ebenen Schirm die Momentenlösung des Zwei-Raum-Problems mit der exakten Lösung nach Meixner und Andrejewski [70 - 72] verglichen werden.

b) Vergleich mit Messungen

Die meisten der im folgenden dargestellten berechneten Ergebnisse wurden mit Strahlungsdiagramm- und Kreuzpolarisationsmessungen verglichen, die im Frequenzbereich von 8 bis 18 GHz im reflexionsarmen Raum des Institutes für Hoch- und Höchstfrequenztechnik der Ruhr-Universität Bochum durchgeführt wurden. Dieser Raum erlaubt eine Auswertung der Meßergebnisse in einem Dynamikbereich von etwa 40 dB. Insbesondere die Kreuzpolarisationsmessungen erfordern einen sehr sorgfältigen Aufbau, damit Störungen durch Halterungen und Speiseleitungen die Meßgröße nicht verfälschen.

c) Überprüfung von Stetigkeits- und Kantenbedingung

Da die elektromagnetischen Felder an den Grenzen der Teilräume bestimmten Bedingungen genügen müssen, kann deren Überprüfung zur Kontrolle der numerischen Ergebnisse verwendet werden. Dabei sind diese natürlich den Approximationen, die aus der Basisfunktionsentwicklung folgen, unterworfen, und die Formulierung des Gleichungssystems läßt eine Erfüllung der Stetigkeitsbedingungen nur im Integralmittel zu. Die Kantenbedingung ist im Lösungsansatz des Zwei- oder Drei-Raum-Problems nicht explizit enthalten. Eine Momentenlösung, die auf endlichen Basisfunktionen aufbaut, kann keine Singularitäten nachbilden. In dieser Arbeit wurde darauf verzichtet, am Rand spezielle auf die Kantenbedingung zugeschnittene Basisfunktionen zu benutzen, um das Rechenprogramm möglichst einfach und

übersichtlich zu halten. Man erhält trotzdem sinnvolle Ergebnisse: Zum einen zeigt der berechnete Verlauf der Felder in der Öffnung einen deutlichen Anstieg der zum Rand normalen Komponente bei Annäherung an diesen, zum andern hat die Randsingularität keinen wesentlichen Einfluß auf das übrige Feld. Außerdem gibt es in der Praxis wegen des endlichen Krümmungsradius der Kante ohnehin keine unendlichen Feldstärkewerte.

d) Überprüfung der numerischen Konvergenz

Aufgrund der endlichen Zahl der Basisfunktionen und wegen der Approximation der Integraloperatoren können Fehler in der Lösung auftreten, die nur schwer abzuschätzen sind. Für die meisten der im 4. Kapitel beschriebenen Ergebnisse wurde daher der Einfluß untersucht, den eine Änderung der Zahl der Basisfunktionen auf das Ergebnis hatte. Gute Konvergenz der Lösung für sich genommen vermag zwar nicht deren Richtigkeit zu garantieren, fehlende Konvergenz jedoch weist auf die Unbrauchbarkeit des Berechnungsverfahrens hin.

e) Überprüfung der Konditionszahl

Konditionszahlen können als Indikator für die Stabilität eines Gleichungssystems verwendet werden [73]. Im Rahmen dieser Arbeit wurde wegen der einfachen Berechenbarkeit die Konditionszahl benutzt, die auf der Unendlichkeitsnorm aufbaut

$$C_\infty(T) = \|T\|_\infty \cdot \|T^{-1}\|_\infty \qquad (3.53)$$

mit

$$\|T\|_\infty = \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{N} |T_{ij}| .$$

Es ist sinnvoll, bei der Invertierung einer Matrix die Konditionszahl mit zu berechnen, um schlecht konditionierte Systeme rechtzeitig erkennen und behandeln zu können [69]. Im 4. Kapitel wird die Konditionszahl für zwei Beispiele exemplarisch angegeben.

f) Leistungsbilanz für das Zwei-Raum-Problem

Da alle Berandungen als ideal leitend angenommen worden sind, muß die Leistung, die von Raum I durch die Öffnungsfläche hindurchtritt, mit der Leistung überein-

stimmen, die in Raum II eintritt. Multipliziert man beide Seiten der konjugiert komplex genommenen Gl. (3.23) von links mit dem zu $\mathbf{V}$ aus Gl. (3.22d) transponierten Vektor

$$\tilde{\mathbf{V}}\,\mathbf{I}^{i*} = \tilde{\mathbf{V}}\,(\mathbf{T}^{I} + \mathbf{T}^{II})^{*}\,\mathbf{V}^{*},$$

so ergibt sich

$$\tilde{\mathbf{V}}\,\mathbf{I}^{i*} - \tilde{\mathbf{V}}\,\mathbf{T}^{I*}\,\mathbf{V}^{*} = \tilde{\mathbf{V}}\,\mathbf{T}^{II*}\,\mathbf{V}^{*}.$$

Diese Gleichung beschreibt die Leistungsbilanz für die Momentenlösung des Zwei-Raum-Problems in der Öffnung: Die linke Seite ist die Scheinleistung in Raum I unmittelbar vor der Öffnung, die rechte Seite die in Raum II unmittelbar nach der Öffnung. Da also der Energiesatz bei dem hier gewählten Ansatz stets erfüllt ist, erübrigen sich bei den folgenden Untersuchungen Leistungsbilanzbetrachtungen. Die Überlegungen zum Drei-Raum-Problem verlaufen analog.

4. Die Kreuzpolarisation im Strahlungsfeld spezieller Hohlleitungsstrahler

4.1 Allgemeine Vorbemerkungen

Zur technischen Ausnutzung der beiden orthogonalen Polarisationen elektromagnetischer Wellen benötigt man kreuzpolarisationsarme Antennen. Aus der Literatur ist eine Vielzahl von theoretischen und experimentellen Untersuchungen bekannt, die sich mit der Analyse und Synthese geeigneter Strahlerformen beschäftigt [49 - 67]. Beim Entwurf und der Dimensionierung von Antennen sind Berechnungen gegenüber Messungen meistens kosten- und zeitsparend. Das in Abschnitt 3.3 beschriebene Integralgleichungsverfahren eignet sich sehr gut dazu, über das Strahlungsfeld und die Kreuzpolarisationseigenschaften von Hohlleitungsstrahlern Aussagen zu machen, die im allgemeinen den Ergebnissen der Kirchhoffschen Näherungsverfahren überlegen sind.

Im Rahmen dieser Arbeit wird zunächst ausgehend von sehr einfachen Strukturen wie der Kreisblende bei senkrecht auftreffender ebener Welle, der Rundhohlleitung und der Rechteckhohlleitung versucht, Aufschluß über die Entstehung von Kreuzpolarisation bei elementaren Strahlern zu gewinnen. In einem zweiten Schritt sollen hieraus Vorschläge zur Optimierung eines Hohlleitungsstrahlers bezüglich der Kreuzpolarisation abgeleitet werden.

Zur Charakterisierung der Kreuzpolarisationseigenschaften wird - ähnlich wie an anderer Stelle [67] - der maximale Wert der Kreuzpolarisation benutzt, der im Fernfeld innerhalb des Bereiches auftritt, in dem die gewünschte Polarisation einen bestimmten Pegel σ nicht unterschreitet. Dieser wird auf den maximalen Wert E_{max} der Hauptpolarisation bezogen

$$X_\sigma = \frac{\max |E_{Kp}(\vartheta,\varphi)|}{E_{max}} \quad \text{für } E(\vartheta,\varphi) \geq \sigma. \qquad (4.1)$$

Dabei ist in vielen Fällen $\varphi = 45^\circ$. Da Hohlleitungsstrahler als Erreger von Spiegelantennen häufig so bemessen werden, daß der Abfall am Rand des Spiegels bei etwa 12 dB liegt, wird hier $\sigma = -12$ dB gewählt. Der Wert von σ wirkt sich zwar auf X_σ aus, die grundlegenden Aussagen über die Eignung eines Strahlers für kreuzpolarisationsarme Anwendungen bleiben jedoch unberührt.

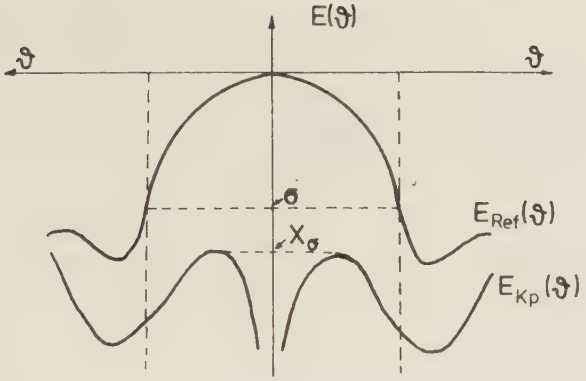


Abb. 4.1 Zur Definition der maximalen Kreuzpolarisation X_σ.

In vielen für die Praxis wichtigen Fällen (z. B. zentralgespeiste Parabolantennen) benötigt man einen Erreger mit rotationssymmetrischer Strahlungscharakteristik. Soll dieselbe Antenne zwei elektromagnetische Wellen mit orthogonaler Polarisation abstrahlen, dann muß sie eine 4n-zählige Symmetrie um ihre Achse besitzen. Bei Hohlleitungsstrahlern kommen daher als Form der Öffnung Kreis und gleichseitiges 4n-Eck in Frage. Der Strahler mit kreisförmigem Querschnitt ist mit hoher Präzession herstellbar, und sein Strahlungsfeld läßt sich einfach berechnen. Die meisten Untersuchungen der vorliegenden Arbeit beschäftigen sich daher mit solchen Strahlern. Von den Vielecken wird nur der quadratische Querschnitt behandelt.

4.2 Die Öffnung im unendlich ausgedehnten ebenen Schirm idealer Leitfähigkeit

Als erster "Strahler" wird die Öffnung im ideal leitenden Schirm behandelt, da sie als grundlegendes Beispiel einer flächenförmigen Quellenverteilung im Sinne von Abschnitt 2.2.3 angesehen, und das Rechenprogramm anhand einer vorliegenden analytischen Lösung getestet werden kann. Die folgenden Untersuchungen beschränken sich auf kreisförmige und quadratische Öffnungen in einem Schirm in der Ebene z = 0. Von z = -∞ trifft eine homogene ebene Welle mit der elektrischen Feldstärke

$$\vec{E}^e(z) = \vec{u}_y E_o e^{-jkz} \qquad (4.2)$$

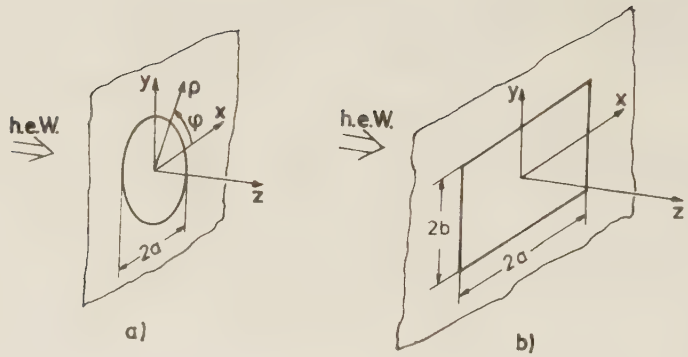


Abb. 4.2 Koordinatensystem bei
a) kreisförmiger Öffnung,
b) rechteckiger Öffnung.

auf diesen Schirm. Es ist naheliegend, im Fall der kreisförmigen Öffnung Zylinderkoordinaten (ρ,φ,z), im Falle der rechteckigen Öffnung kartesische Koordinaten (x,y,z) zu benutzen, wobei der Ursprung jeweils in der Mitte der Öffnung liegt.

Die Kirchhoffschen Näherungen liefern im Fernfeld:

Verfahren ER:

$$(E_\vartheta)_{ER} = \frac{e^{-jkr}}{2\pi kr}\, j\, E_0\, f_\vartheta(\vartheta,\varphi),$$

$$(E_\varphi)_{ER} = \frac{e^{-jkr}}{2\pi kr}\, j\, E_0 \cos\vartheta\, f_\varphi(\vartheta,\varphi), \tag{4.3}$$

Verfahren HR:

$$(E_\vartheta)_{HR} = \frac{e^{-jkr}}{2\pi kr}\, j\, E_0 \cos\vartheta\, f_\vartheta(\vartheta,\varphi),$$

$$(E_\varphi)_{HR} = \frac{e^{-jkr}}{2\pi kr}\, j\, E_0\, f_\varphi(\vartheta,\varphi), \tag{4.4}$$

Verfahren EHR:

$$(E_\vartheta)_{EHR} = \frac{e^{-jkr}}{4\pi kr}\, j\, E_0\, (1+\cos\vartheta)\, f_\vartheta(\vartheta,\varphi),$$

$$(E_\varphi)_{EHR} = \frac{e^{-jkr}}{4\pi kr}\, j\, E_0\, (1+\cos\vartheta)\, f_\varphi(\vartheta,\varphi). \tag{4.5}$$

Die Funktionen $f_\vartheta(\vartheta,\varphi)$ und $f_\varphi(\vartheta,\varphi)$ sind im Anhang 6.1 für kreisförmige und

rechteckige Öffnungen angegeben.

Die Matrizengleichung (3.23) des Zwei-Raum-Problems vereinfacht sich für eine Öffnung im ebenen Schirm, da die Räume I und II Halbräume sind, zu

$$2\,\mathbf{T}^{HR}\,\mathbf{V} = \mathbf{I}^{i}. \tag{4.6}$$

Bei der kreisförmigen Öffnung werden als Basisfunktionen in der Entwicklung (3.18)

$$\begin{aligned}\vec{M}^{\rho}_{mn}(\rho,\varphi) &= \vec{u}_{\rho}\,\frac{1}{\rho}\,D(\rho-\rho_n)\cos(m\varphi),\\ \vec{M}^{\varphi}_{mn}(\rho,\varphi) &= -\vec{u}_{\varphi}\,\frac{1}{\rho}\,D(\rho-\rho_n)\sin(m\varphi),\end{aligned} \tag{4.7}$$

mit

$m = 1,$

$n = 1,2,\ldots N,$

$\rho_n = n\,\frac{a}{N+1},$

a Radius der Öffnung,

benutzt. $D(\rho-\rho_n)$ bezeichnet eine Dreiecksfunktion nach Abb. 3.7, die im Bereich $\rho_{n-1} < \rho < \rho_{n+1}$ ungleich Null ist und ihr Maximum bei ρ_n hat. $\vec{M}^{\rho}_{mn}$ und $\vec{M}^{\varphi}_{mn}$ beschreiben die Entwicklung der ρ- und φ-Komponente der äquivalenten Flächenstromdichte im Bereich der Öffnung. Die Gesamtzahl der Basisfunktionen beträgt 2N. Der Faktor $\frac{1}{\rho}$ erleichtert die Divergenzbildung (vergl. Anhang 6.3.2) und eliminiert bei der späteren Integration über die Fläche der Öffnung den im Flächenelement $\rho\,d\rho\,d\varphi$ auftretenden Faktor ρ [40].

Wegen der senkrechten Inzidenz läßt sich das elektrische Feld der einfallenden Welle in der Öffnung aufspalten in

$$\vec{E}^{e}(z=0) = \vec{u}_{\rho}\,E_0\sin\varphi + \vec{u}_{\varphi}\,E_0\cos\varphi.$$

Für die damit verknüpfte äquivalente Flächenstromdichte gilt

$$\vec{M}^{e} = -\vec{u}_z \times \vec{E}^{e}(z=0) = \vec{u}_{\rho}\,E_0\cos\varphi - \vec{u}_{\varphi}\,E_0\sin\varphi. \tag{4.8}$$

Das gesamte Beugungsfeld hat dann dieselbe φ-Abhängigkeit, zur Lösung der Integralgleichung ist daher eine Basisfunktionsentwicklung mit m = 1 entsprechend Gl. (4.7) ausreichend.

Im allgemeinen Fall der schrägen Inzidenz müßten die Basisfunktionen doppelt indiziert sein, wobei m die Ganzbereichsentwicklung in φ-Richtung nach harmonischen Funktionen und n die Teilbereichsentwicklung in ρ-Richtung nach sich überlappenden Dreiecksfunktionen angeben. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann für die ρ-Komponente eine $\cos(m\varphi)$-, für die φ-Komponente eine $\sin(m\varphi)$-Abhängigkeit angesetzt werden, die nach Abschnitt 2.2 einer "y-Polarisation" der Quellenverteilung entspricht. Das Strahlungsdiagramm der orthogonalen "x-Polarisation" läßt sich daraus durch einfache Koordinatentransformation gewinnen.

Die Gewichtsfunktionen $\vec{W}^{\rho}_{mn}$ und $\vec{W}^{\varphi}_{mn}$ werden nach der Methode von Galerkin gleich den Basisfunktionen $\vec{M}^{\rho}_{mn}$ und $\vec{M}^{\varphi}_{mn}$ gewählt. Der Anregungsvektor für eine kreisförmige Fläche ist dem Anhang 6.3.7, die zugehörige Halbraumadmittanzmatrix dem Anhang 6.3.2 zu entnehmen.

In der rechteckigen Öffnung wird die magnetische Flächenstromdichte entwickelt nach [74]:

$$\vec{M}^{x}_{mn} = \vec{u}_x \, D(x - x_m) \, P(y - y_n) \qquad \text{für } m = 1,2,\ldots M,\ n = 0,1,\ldots N,$$

$$\vec{M}^{y}_{mn} = \vec{u}_y \, P(x - x_m) \, D(y - y_n) \qquad \text{für } m = 0,1,\ldots M,\ n = 1,2,\ldots N, \tag{4.9}$$

mit

$$x_m = -a + m\,\frac{2a}{M+1},$$

$$y_n = -b + n\,\frac{2b}{N+1},$$

2a, 2b Seitenlängen.

$D(\xi)$ und $P(\xi)$ bezeichnen Dreiecks- und Pulsfunktionen nach Abb. 3.7. Die Gesamtzahl der Basisfunktionen beträgt in diesem Fall $(N+1)M + (M+1)N$. Die Ableitung des Anregungsvektors für den rechteckigen Fall ist im Anhang 6.4.3, die der Halbraumadmittanzmatrix im Anhang 6.4.1 näher erläutert.

Meixner und Andrejewski [70 - 72] haben für das Problem der Beugung an einer kreisförmigen Öffnung eine analytische Lösung angegeben, die von der Entwicklung nach Sphäroidfunktionen ausgeht und die in der numerischen Auswertung recht aufwendig ist. Zur Untersuchung der Zuverlässigkeit des in Abschnitt 3.3 beschriebenen Integralgleichungsverfahrens wurden die Ergebnisse aus [71] mit denen der Momentenlösung verglichen. Abb. 4.3 zeigt die $|E|^2$-Verteilung in der kreisförmigen Öffnung mit dem Radius $a = 1{,}592\ \lambda$ ($ka = 10$) für die analytische und die Momentenlösung in E- und H-Ebene. Die Momentenlösung wurde mit einer Basisfunktionsentwicklung gewonnen, die in ρ-Richtung aus 24 äquidistant verteilten Dreiecksfunktionen bestand, so daß auf die Strecke einer Wellenlänge etwa 15 Basisfunktionen entfielen. Die numerische Integration in ρ-Richtung wurde nach der Trapezregel mit einem Stützpunktabstand von $0{,}03\ \lambda$ und in φ-Richtung mit der Gaußschen Quadraturformel der Ordnung 10 durchgeführt. Trotz dieser ziemlich groben Einteilung ist das Ergebnis für den Feldstärkeverlauf zufriedenstellend. Die Abweichung des nach der Momentenmethode berechneten Betragsquadrates der elektrischen Feldstärke von dem analytisch ermittelten ist in der Mitte der Öffnung am größten. Sie liegt aber auch hier noch unter 7 %. Abb. 4.3 zeigt auch

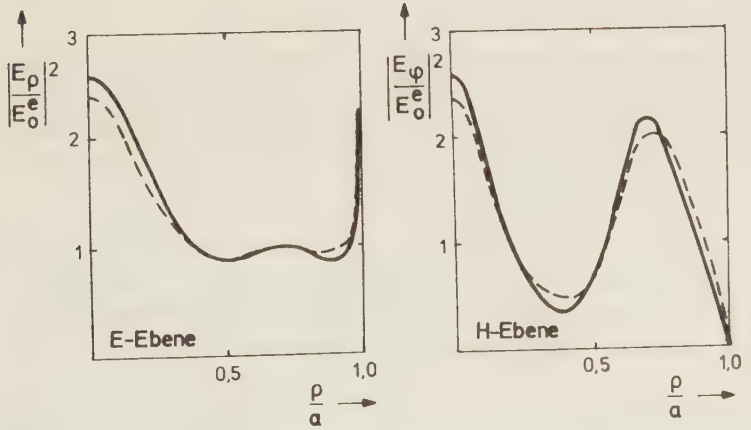


Abb. 4.3 Betragsquadrat der elektrischen Feldstärke in der kreisförmigen Öffnung mit dem Radius $a = 1{,}592\ \lambda$ im unendlich ausgedehnten, ideal leitenden Schirm für eine senkrecht einfallende homogene ebene Welle mit linearer Polarisation in E- und H-Ebene.
——— analytische Lösung [71],
– – – – – – – Momentenlösung.

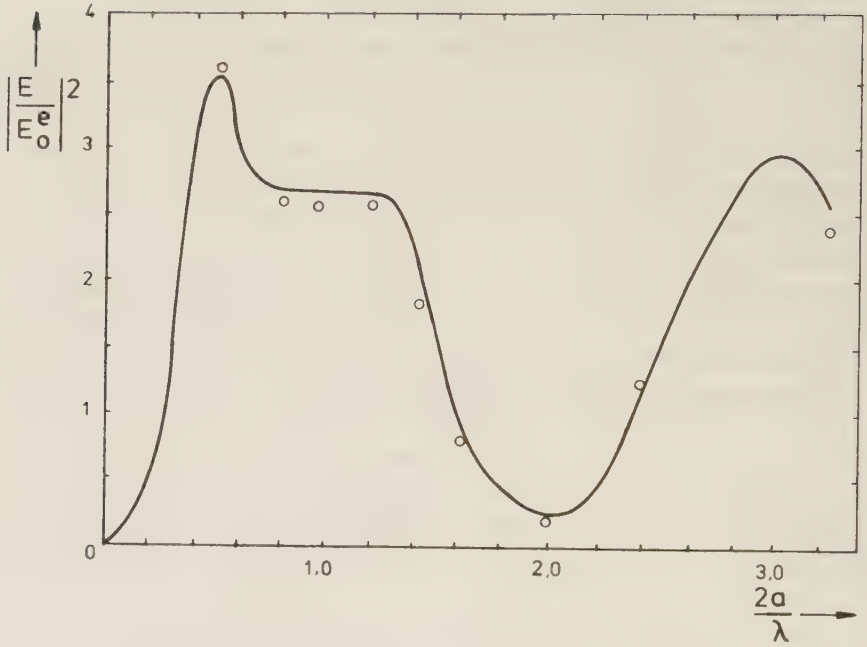


Abb. 4.4 Betragsquadrat der elektrischen Feldstärke in der Mitte einer kreisförmigen Öffnung im unendlich ausgedehnten, infinitesimal dünnen und ideal leitenden Schirm bei senkrechtem Einfall einer homogenen ebenen Welle in Abhängigkeit vom Öffnungsdurchmesser 2a.
——— analytische Lösung [71],
o Momentenlösung.

deutlich, daß die Momentenlösung den Feldverlauf am Rande der Öffnung gut wieder gibt: $|E_o|^2$ steigt dort merklich an, ohne daß für das aus der Kantenbedingung bekannte Verhalten ein spezieller Ansatz gemacht wurde.

Abb. 4.4 zeigt den $|E|^2$-Verlauf in der Mitte der kreisförmigen Öffnung und Abb. 4.5 den Transmissionskoeffizienten t als Verhältnis der durch die kreisförmige Öffnung transmittierten zur einfallenden Leistung in Abhängigkeit vom Durchmesser. Dabei wurden die Momentenlösungen mit einer dem jeweiligen $2a/\lambda$-Wert entsprechenden Zahl von Dreiecks-Basisfunktionen gewonnen, wobei wieder von 15 pro Wellenlänge ausgegangen wurde. Da der Transmissionskoeffizient eine integrale Größe bezüglich der Feldverteilung in der Öffnung ist, ergibt sich für ihn eine noch bessere Übereinstimmung mit der analytischen Lösung

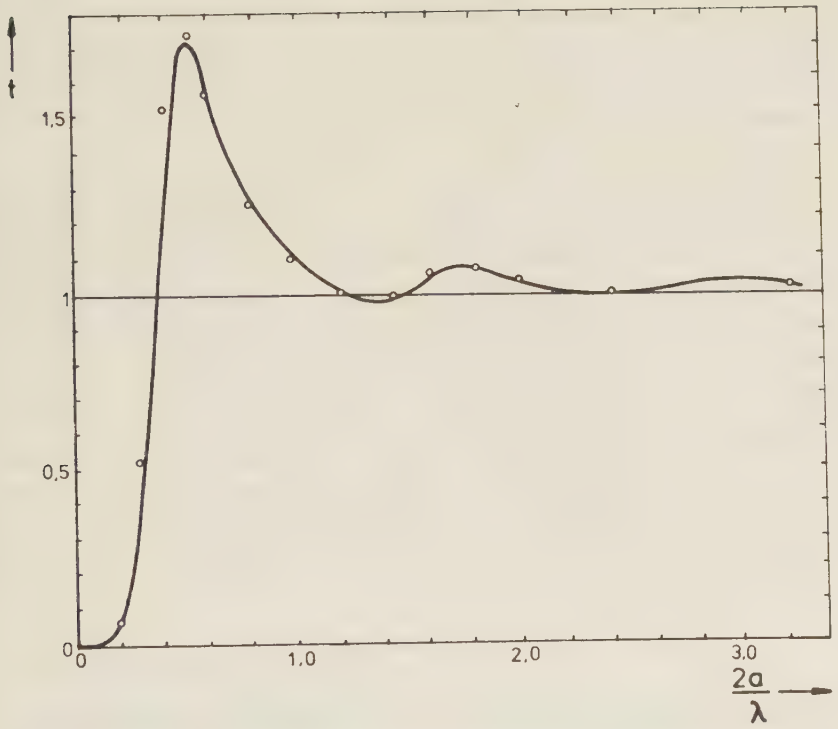


Abb. 4.5 Der Transmissionskoeffizient einer kreisförmigen Öffnung im ebenen Schirm bei senkrechtem Einfall einer homogenen ebenen Welle in Abhängigkeit vom Öffnungsdurchmesser 2a.
——— analytische Lösung [72],
o Momentenlösung.

als bei den Feldwerten selbst. Der Vergleich der Strahlungscharakteristiken von Momentenlösung und analytischer Berechnung, der hier nicht wiedergegeben wird, zeigt eine ähnlich gute Übereinstimmung wie beim Transmissionskoeffizienten.

Aus Abb. 4.6 ist die Konditionszahl C_∞ der Matrix, die bei der Momentenlösung zu invertieren ist, für eine unterschiedliche Zahl N von Basisfunktionen zu entnehmen. Die Konditionszahl wächst mit steigender Zahl von Basisfunktionen

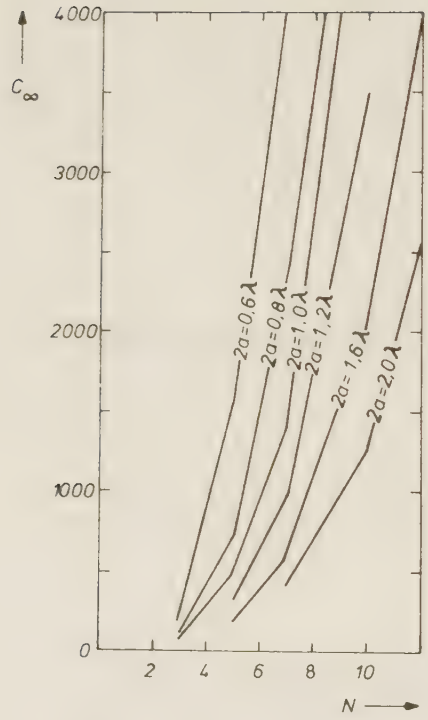


Abb. 4.6 Die Konditionszahl der Admittanzmatrix einer kreisförmigen Öffnung im ebenen Schirm in Abhängigkeit von der Zahl der Basisfunktionen für verschiedene Öffnungsdurchmesser.

und abnehmendem $2a/\lambda$. Letzteres ist auf die stärkere Verkopplung der Dreiecksfunktionen zurückzuführen, weil bei konstantem N die Zahl der Basisfunktionen pro Wellenlänge zunimmt. Es ist daher nicht sinnvoll, eine zu feine Unterteilung zu wählen. Unterteilungen von 10 bis 15 Basisfunktionen pro Wellenlänge liefern im allgemeinen brauchbar konditionierte Gleichungssysteme.

Zur Bestimmung von Referenz- und Kreuzpolarisation ist die berechnete oder gemessene elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vartheta,\varphi)$ im Fernfeld entsprechend Gl. (2.2) mit den Einheitsvektoren zu multiplizieren:

$$E_{Ref}(\vartheta,\varphi) = \vec{E}(\vartheta,\varphi)\cdot\vec{u}_{p1}(\varphi),$$

$$E_{Kp}(\vartheta,\varphi) = \vec{E}(\vartheta,\varphi)\cdot\vec{u}_{p2}(\varphi).$$

Bei den Näherungsverfahren liefert die Extremwertuntersuchung das Ergebnis, daß

bei kreisförmigen und quadratischen Öffnungen die maximale Kreuzpolarisation in den 45^{o}-Ebenen zur E- und H-Ebene auftritt. Das Integralgleichungsverfahren führt im Fall von kreisförmigen Öffnungen zur gleichen Aussage, während bei quadratischen Öffnungen die Ebene mit der maximalen Kreuzpolarisation nicht geschlossen angegeben werden kann. Es darf aber erwartet werden, daß ihre Lage nicht wesentlich von der mit Hilfe des Näherungsverfahrens berechneten abweicht.

Die Abbn. 4.7 und 4.8 zeigen die nach unterschiedlichen Verfahren berechnete maximale Kreuzpolarisation $X_{-12\ dB}$ nach Gl. (4.1) in der 45^{o}-Ebene des Fernfeldes von kreisförmigen und quadratischen Öffnungen im ebenen Schirm in Abhängigkeit von Öffnungsdurchmesser und -kantenlänge, sowie die 12 dB-Breiten der Hauptkeule in E- und H-Ebene. Dargestellt sind die Ergebnisse der Momentenlösung nach Gl. (4.6) und des Verfahrens ER. Während der Verlauf der Kreuzpolarisation in der 45^{o}-Ebene nach den Verfahren ER und HR übereinstimmt, vertauschen sich die Werte für die 12 dB-Breiten von E- und H-Ebene, wie man durch Einsetzen der Ausdrücke für f_{ϑ} und f_{φ} (s. Anhang 6.1a,b) in Gln. (4.3) und (4.4) für kreisförmige und quadratische Öffnungen sieht. Die Berechnungen nach dem Verfahren EHR liefern für beliebige Öffnungen beim Einfall einer homogenen ebenen Welle keine Kreuzpolarisation, wie bereits im Abschnitt 2.2.3 gezeigt worden ist.

Aus den Diagrammen ist zu erkennen:

(1) Mit wachsendem Durchmesser oder wachsender Kantenlänge der Öffnung nimmt die Kreuzpolarisation im Mittel stetig ab. Dieses Verhalten ist darauf zurückzuführen, daß mit größer werdender Öffnungsfläche der Einfluß der Berandung abnimmt, so daß das Feld in der Öffnung immer weniger von dem der einfallenden Welle abweicht. Ein Ausschnitt aus einer homogenen ebenen Welle entspricht aber nach Gln. (2.12-13) einer äquivalenten Quellenverteilung, deren Fernfeld kreuzpolarisationsfrei ist.

(2) Die maximale Kreuzpolarisation nach der Momentenlösung nimmt für die kreisförmige Öffnung langsamer ab als für die quadratische Öffnung. Außerdem ist die Abweichung der ER-Lösung von der Momentenlösung für $2a/\lambda > 1{,}0$ bei der kreisförmigen Öffnung beträchtlich größer als bei der quadratischen Öffnung. Der Grund für beide Befunde liegt wohl darin, daß die elektrische Feldstärke in der Öffnungsfläche am Rand senkrecht zu diesem einmünden muß. Die quadratische Öffnung besitzt nur gerade Randstücke, die entweder senkrecht oder parallel zur

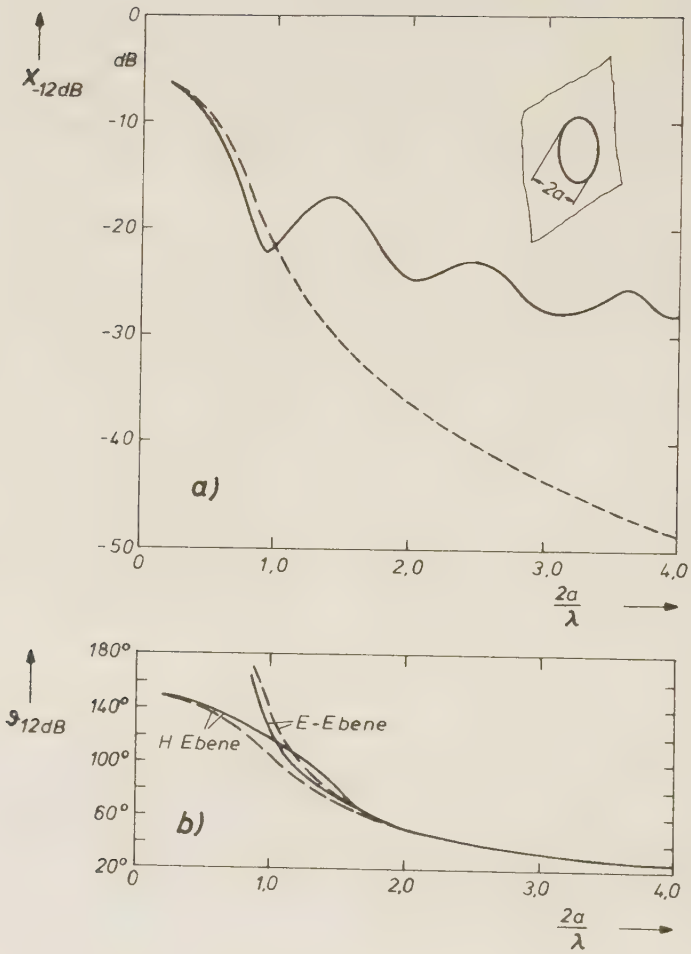


Abb. 4.7 Maximale Kreuzpolarisation (a) und 12 dB-Breiten (b) im Fernfeld einer kreisförmigen Öffnung im ebenen Schirm bei senkrechtem Einfall einer linear polarisierten homogenen ebenen Welle.

——————— *Momentenlösung*

— — — — — *Verfahren ER*

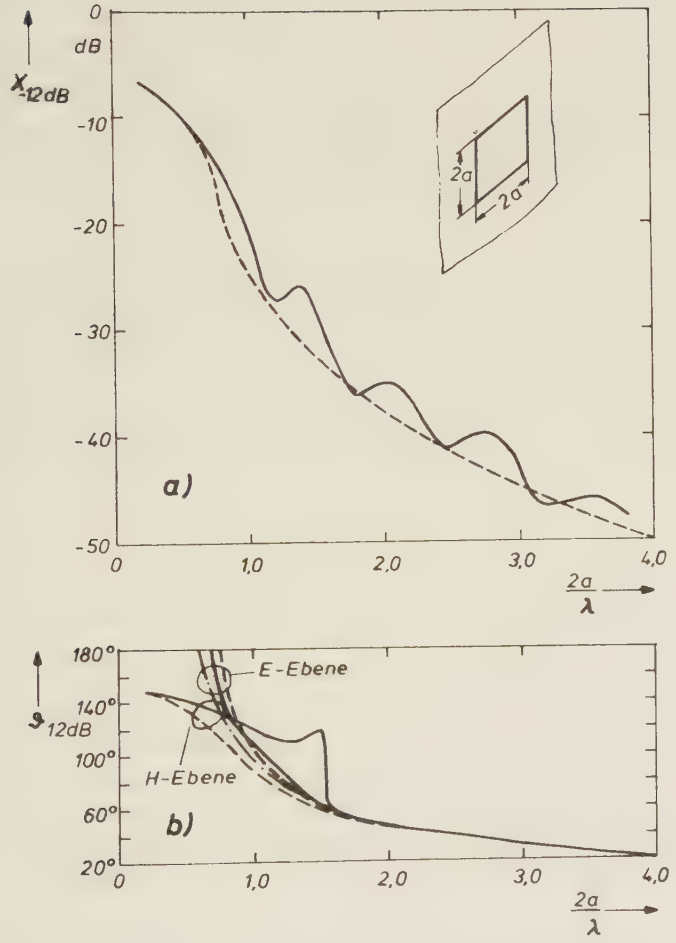


Abb. 4.8 Maximale Kreuzpolarisation (a) und 12 dB-Breiten (b) im Fernfeld einer quadratischen Öffnung im ebenen Schirm bei senkrechtem Einfall einer linear polarisierten homogenen ebenen Welle.

———— *Momentenlösung*

– – – – – *Verfahren ER*

—·—·— *Verfahren EHR*

Polarisationsrichtung der einfallenden Welle verlaufen. Bei der kreisförmigen Öffnung hingegen sind die Feldlinien im Vergleich zu denen der einfallenden Welle stark "verbogen".

(3) Die Momentenlösung liefert in Abhängigkeit von Durchmesser oder Kantenlänge einen oszillierenden Verlauf der maximalen Kreuzpolarisation. Diese Oszillationen beruhen auf Resonanzeffekten, die bei bestimmten Abmessungen durch die Anstrahlung des Randes zustandekommen.

(4) Der Vergleich der 12 dB-Breiten zeigt, daß die unterschiedlichen Berechnungsverfahren für $2a/\lambda > 2{,}0$ im Rahmen der Zeichengenauigkeit das gleiche Ergebnis liefern. Bei nahezu gleicher Keulenbreite in E- und H-Ebene ist die Kreuzpolarisation, die nach den Ausführungen in Abschnitt 2.3 bei gleichen Keulenbreiten verschwinden müßte, ein wesentlich empfindlicheres Anzeigeinstrument für unterschiedliche E- und H-Diagramme als die berechneten Diagramme selbst.

4.3 Die kreisförmige Hohlleitungsöffnung im unendlich ausgedehnten ebenen Schirm idealer Leitfähigkeit

Bei der Berechnung der Abstrahlung aus einer Hohlleitung von kreisförmigem Querschnitt nimmt man häufig an, daß die Öffnung in einem unendlich ausgedehnten, ideal leitenden ebenen Schirm liegt. Obwohl praktisch eingesetzte Antennenerreger nicht diese Form haben, kann man z. B. das Problem einer Hohlleitungsantenne in einem Flugzeugrumpf oder eines Hohlleitungselementes einer großen Gruppenantenne angenähert behandeln.

In der Rundhohlleitung mit dem Radius a gilt für die normierten Transversalfeldstärken unter Beachtung von Gl. (3.26) bei den H-Wellen:

$$\vec{e}^{\,H}_{mi} = B^H_{mi}\,[\vec{u}_\rho\,\frac{m}{\rho}\,J_m(k^H_{\rho i}\rho)\,\sin(m\varphi) + \vec{u}_\varphi\,k^H_{\rho i}\,J'_m(k^H_{\rho i}\rho)\,\cos(m\varphi)], \qquad (4.10a)$$

mit

$$J'_m(k^H_{\rho i}a) = 0 \quad \text{für} \quad i = 1,2,3,\ldots \quad \text{und} \quad m = 0,1,2,\ldots,$$

$$B^H_{mi} = \{\tfrac{\pi}{2}\,[(k^H_{\rho i}a)^2 - m^2]\,J^2_m(k^H_{\rho i}a)\}^{-1/2},$$

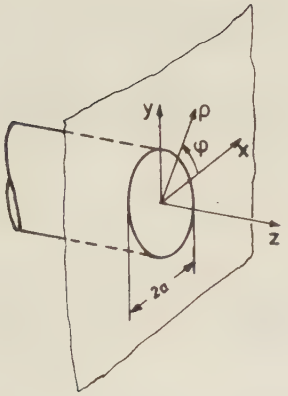


Abb. 4.9 Koordinatensystem für eine Rundhohlleitungsöffnung im unendlich ausgedehnten ebenen Schirm.

bei den E-Wellen:

$$\vec{e}^{E}_{mi} = B^{E}_{mi}\,[\vec{u}_\rho\, k^{E}_{\rho i}\, J'_m(k^{E}_{\rho i}\rho)\,\sin(m\varphi) + \vec{u}_\varphi\,\frac{m}{\rho}\,J_m(k^{E}_{\rho i}\rho)\,\cos(m\varphi)], \qquad (4.10b)$$

mit

$$J_m(k^{E}_{\rho i}a) = 0 \quad \text{für} \quad i = 1,2,3,\ldots \quad \text{und} \quad m = 0,1,2,\ldots,$$

$$B^{H}_{mi} = \{\tfrac{\pi}{2}\,[k^{E}_{\rho i}\, a\, J_{m-1}(k^{E}_{\rho i}a)]^2\}^{-1/2}.$$

Dabei steht $J_m(\xi)$ für die Besselfunktion der Ordnung m, $J'_m(\xi)$ für deren Ableitung nach dem Argument. Die B^{H}_{mi} und B^{E}_{mi} sind Normierungsfaktoren zur Erfüllung der Orthonormalitätsbedingung (3.26). Die Feldwellenadmittanz berechnet sich bei H-Wellen zu

$$Y^{H}_{mi} = \frac{\beta^{H}_{mi}}{\omega\mu_0\mu_r} = \frac{1}{kZ}\begin{cases}[k^2 - (k^{H}_{\rho i})^2]^{1/2} & \text{für } k \geq k^{H}_{\rho i}\\ -j[(k^{H}_{\rho i})^2 - k^2]^{1/2} & \text{für } k < k^{H}_{\rho i}\end{cases} \qquad (4.11a)$$

und bei E-Wellen zu

$$Y^{E}_{mi} = \frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon_r}{\beta^{E}_{mi}} = \frac{k}{Z}\begin{cases}[k^2 - (k^{E}_{\rho i})^2]^{-1/2} & \text{für } k \geq k^{E}_{\rho i}\\ -j[(k^{E}_{\rho i})^2 - k^2]^{-1/2} & \text{für } k < k^{E}_{\rho i}.\end{cases} \qquad (4.11b)$$

Näherungslösungen für das Strahlungsfeld einer Rundhohlleitung erhält man mit Gln. (3.13-15) und (6.6,7). Das Integralgleichungsverfahren des Zwei-Raum-Problems geht nach Gl. (3.23) im Gegensatz zu dem der Blende im ebenen Schirm (Abschnitt 4.2) von zwei unterschiedlichen Teilräumen aus, die durch die Admittanzmatrizen $\mathbf{T}_O^{HR}$ und $\mathbf{T}_O^{Hl}$ *) beschrieben werden:

$$(\mathbf{T}_O^{HR} + \mathbf{T}_O^{Hl})\ \mathbf{V} \;=\; \mathbf{I}_O^{Hl}.$$

Als Basis- und Gewichtsfunktionen werden die Ausdrücke von Gl. (4.7) benutzt. Im folgenden wird davon ausgegangen, daß die Hauptwelle, also die H_{11}-Welle, mit der transversalen elektrischen Feldstärke $E_o \vec{e}_{11}^{H}$ von $z = -\infty$ kommend auf die Öffnungsfläche in $z = 0$ trifft. Da das Feld der H_{11}-Welle eine Abhängigkeit wie $\cos\varphi$ besitzt, findet man wegen der Rotationssymmetrie der Anordnung die gleiche φ-Abhängigkeit bei allen Feld- und äquivalenten Stromgrößen wieder, d. h. man braucht nur die Elemente der Admittanzmatrizen mit $m = 1$ zu berücksichtigen. Der Koeffizientenvektor der Entwicklung nach Basisfunktionen berechnet sich daher nach

$$_1\mathbf{V} \;=\; (_1\mathbf{T}_O^{HR} + {}_1\mathbf{T}_O^{Hl})^{-1}\ {}_1\mathbf{I}_O^{Hl}, \qquad (4.12)$$

wobei der Index "1" auf die φ-Abhängigkeit ($m = 1$ in $\cos(m\varphi)$ und $\sin(m\varphi)$) hinweisen soll. Die Berechnung der Matrizen, die zur Lösung des Zwei-Raum-Problems benötigt werden, ist im Anhang beschrieben ($_1\mathbf{T}_O^{HR}$ in 6.3.2, $_1\mathbf{T}_O^{Hl}$ in 6.3.4 und $_1\mathbf{I}_O^{Hl}$ in 6.3.7).

Mit den aus Gl. (4.12) ermittelten Koeffizienten $_1V_q$ kann man Apertur- und Fernfeld bestimmen. Mit Gl. (3.18) läßt sich die elektrische Feldstärke in der Hohlleitungsöffnung auf die Form

$$\vec{E}(\rho,\varphi,z{=}0) = \vec{u}_z \times \vec{M}(\rho,\varphi) = \vec{u}_\rho\ E_1(\rho)\ \sin\varphi + \vec{u}_\varphi\ E_2(\rho)\ \cos\varphi \qquad (4.13)$$

bringen, wobei $E_1(\rho)$ und $E_2(\rho)$ den Verlauf von E auf der y- und x-Achse beschreiben. Durch Angabe dieser beiden Funktionen ist also das Öffnungsfeld bestimmt. Das transversale magnetische Feld in der Öffnung kann nach Gl. (3.9b) berechnet werden. Man findet ganz analog eine Darstellung der Form

---

*) Die Indizes "HR" und "Hl" sind Abkürzungen für "Halbraum" und "Hohlleitung", "O" weist auf die kreisförmige Öffnung hin.

$$\vec{H}(\rho,\varphi,z=0) = -\vec{u}_{\rho} H_1(\rho) \cos\varphi + \vec{u}_{\varphi} H_2(\rho) \sin\varphi. \qquad (4.14)$$

Das Fernfeld ergibt sich aus Gl. (3.12). Nach den Überlegungen im Abschnitt 2.2.3 erhält man

$$\vec{E}(\vartheta,\varphi) = \vec{u}_{\vartheta} E_E(\vartheta) \sin\varphi + \vec{u}_{\varphi} E_H(\vartheta) \cos\varphi, \qquad (4.15)$$

wobei $E_E(\vartheta)$ und $E_H(\vartheta)$ den Verlauf von E in E- und H-Ebene beschreiben. Die zugehörige Kreuzpolarisationskomponente findet man nach Gl. (2.2) durch Multiplikation mit $\vec{u}_{p2}$:

$$E_{Kp}(\vartheta) = [E_E(\vartheta) - E_H(\vartheta)] \cos\varphi \sin\varphi. \qquad (4.16)$$

Eine Extremwertuntersuchung der Kreuzpolarisationskomponente bezüglich der φ-Koordinate zeigt, daß die maximale Kreuzpolarisation wiederum in den beiden 45°-Ebenen zur E- und H-Ebene auftritt.

Bevor der Feldverlauf in der Öffnung und im Fernfeld dargestellt wird, soll für einen Hohlleitungsdurchmesser auf Untersuchungen zur Konvergenz der Momentenlösung eingegangen werden. Abb. 4.10 zeigt das Verhalten einiger Ergebnisgrößen, die aus der Lösung von Gl. (4.12) durch Veränderung der Zahl N der Basisfunktionen und der Zahl I der Hohlleitungswellen gewonnen wurden. Die Numerierung der Hohlleitungswellen erfolgt dabei unabhängig davon, ob es sich um H- oder E-Wellen handelt, in der Reihenfolge wachsender Grenzfrequenzen. Eine Erhöhung von I bewirkt eine Steigerung der Genauigkeit bei der Berechnung der Matrix T_O^{H1}. Es ist jedoch nicht möglich, die Genauigkeit der Gesamtrechnung beliebig zu steigern, da die exakte Lösung wegen der Beschränkung der Stützpunktdichte, die bei der numerischen Integration aus Rechenzeitgründen notwendig ist, und wegen der endlichen Zahl der Basisfunktionen grundsätzlich nur angenähert werden kann. Aus Abb. 4.10 ist zu entnehmen, daß bis auf Y_A die dargestellten Größen recht schnell ihre endgültigen Werte annehmen. Bei der normierten Eingangsadmittanz der Apertur

$$Y_A = \frac{1 - r_{H11}}{1 + r_{H11}} \qquad (4.17)$$

konvergiert nur der Realteil zufriedenstellend, während der Imaginärteil divergiert. Ähnliches Verhalten wurde auch schon anderweitig [69] beobachtet. Der

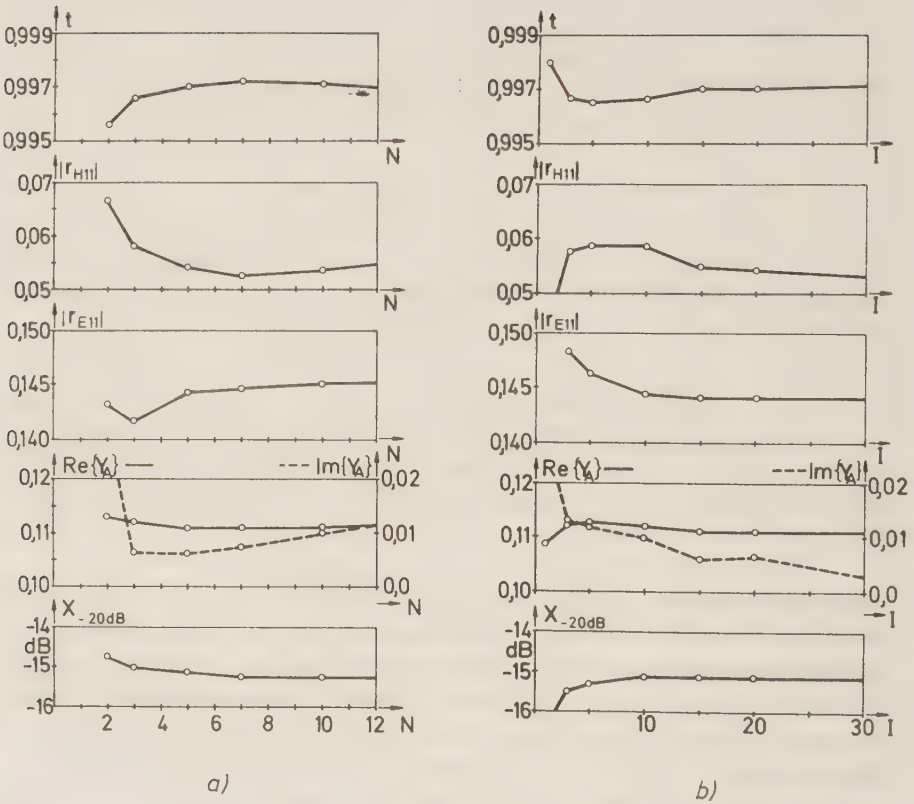


Abb. 4.10 Konvergenzverhalten des Transmissionskoeffizienten t (vergl. S. 56), des Reflexionsfaktors r_{H11} der H_{11}-Welle, des Reflexionsfaktors r_{E11} der E_{11}-Welle, der normierten Aperturadmittanz Y_A und der maximalen Kreuzpolarisation $X_{-20\,dB}$ für eine Hohlleitungsöffnung mit dem Durchmesser $2a = 0{,}8\lambda$ im unendlich ausgedehnten ebenen Schirm in Abhängigkeit von

a) der Zahl N der Basisfunktionen (I = 20),

b) der Zahl I der Hohlleitungswellen (N = 5).

eigentliche Grund für dieses Verhalten der Momentenlösung ist nicht bekannt. Bedenkt man, daß der Imaginärteil um eine Zehnerpotenz kleiner als der Realteil ist, so fällt ein Fehler des Imaginärteils nicht so sehr ins Gewicht. Wie auch Konditionszahluntersuchungen gezeigt haben, ist die Genauigkeit der Momentenlösung als für die Praxis ausreichend zu betrachten, wenn 10 bis 14 Basisfunktionen pro Wellenlänge und 15 bis 20 Wellentypen in der Hohlleitung angesetzt werden.

In Abbn. 4.11-14 sind der Verlauf des elektrischen und magnetischen Feldes in der Hohlleitungsöffnung sowie das Fernfeld für $2a/\lambda = 0{,}8$ und 1,4 nach verschiedenen Berechnungsverfahren dargestellt. Abgesehen davon, daß beim Verfahren ER das elektrische Feld die Kantenbedingung nicht erfüllen kann, stimmt der Verlauf von $\vec{E}$ und $\vec{H}$ in der Öffnungsebene mit dem der Momentenlösung recht gut überein. Die Unterschiede sind im wesentlichen darauf zurückzuführen, daß das Näherungsverfahren von einer idealen "Anpassung" der strahlenden Hohlleitung an den freien Raum ausgeht, während die Momentenlösung die Reflexion in der Öffnungsebene berücksichtigt. Diese nimmt mit wachsendem Hohlleitungsdurchmesser ab, so daß die Übereinstimmung zunehmend besser wird. Das Verfahren HR kann den Verlauf des elektromagnetischen Feldes in der Öffnung und auf dem Schirm, wo aufgrund der Randbedingung $E_{tan} = 0$ sein müßte, nicht zufriedenstellend beschreiben.

Der gleiche Befund ergibt sich für das Fernfeld. Um die nach den verschiedenen Berechnungsverfahren ermittelten Strahlungsdiagramme vergleichen zu können, wurden sie auf den maximalen Wert E_{max} nach dem jeweiligen Berechnungsverfahren normiert (Abbn. 4.12 und 4.14). Bei einheitlichem Bezug auf den Wert E_{max} der Näherungslösungen würde der Verlauf der Momentenlösung bei $2a/\lambda = 0{,}8$ um 0,27 dB unter, bei $2a/\lambda = 1{,}4$ um 0,08 dB über dem nach dem Verfahren ER liegen. Einzelne Messungen wurden mit Rundhohlleitungen vom Durchmesser 2a = 23 mm und 38 mm im X-Band durchgeführt. Die Hohlleitungsöffnung war im Zentrum einer kreisförmigen Metallplatte (Durchmesser 600 mm) angeordnet, wobei der Rand der Platte mit einem Absorberring verkleidet wurde, um Beugungserscheinungen weitgehend auszuschalten. Die Messungen sind in guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Momentenmethode.

In Abb. 4.15 ist der Transmissionskoeffizient t als Verhältnis der abgestrahlten zur auf die Hohlleitungsöffnung einfallenden Wirkleistung in Abhängigkeit vom Leitungsdurchmesser dargestellt. Im Vergleich mit Abb. 4.5 fällt auf, daß der Transmissionskoeffizient nicht über 1 hinausgeht. Vom Durchmesser $2a/\lambda = 1{,}22$ an,

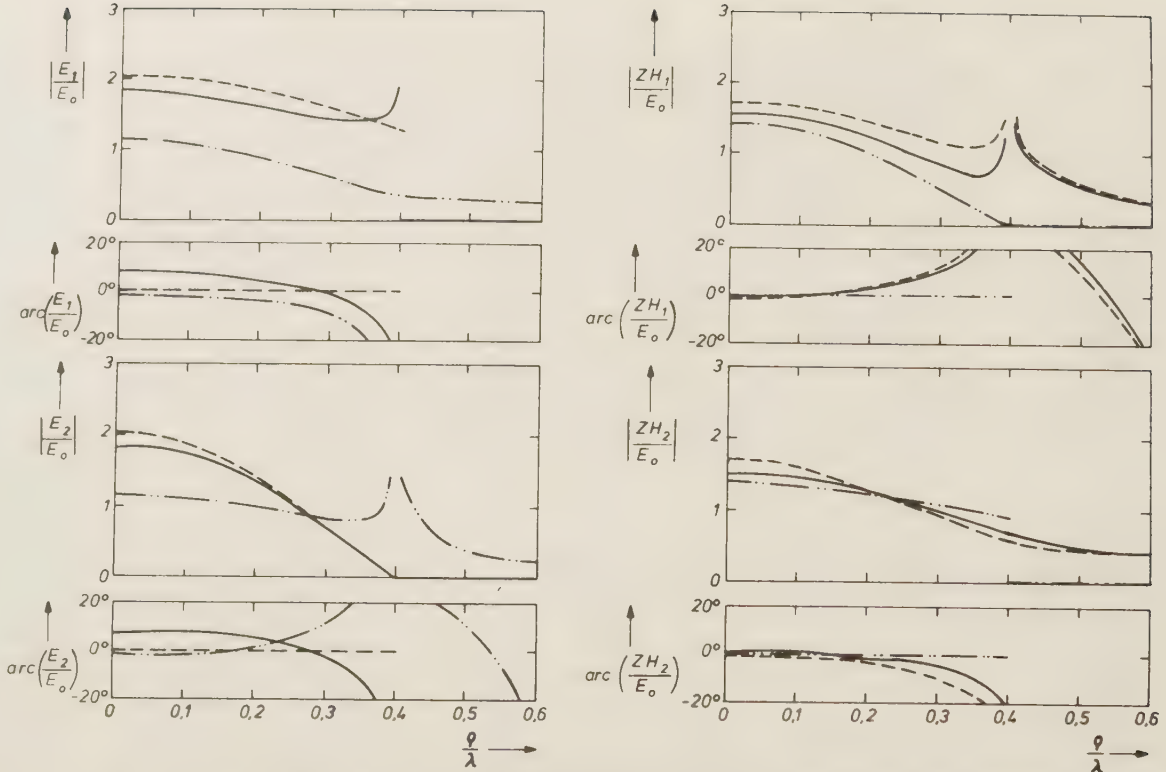
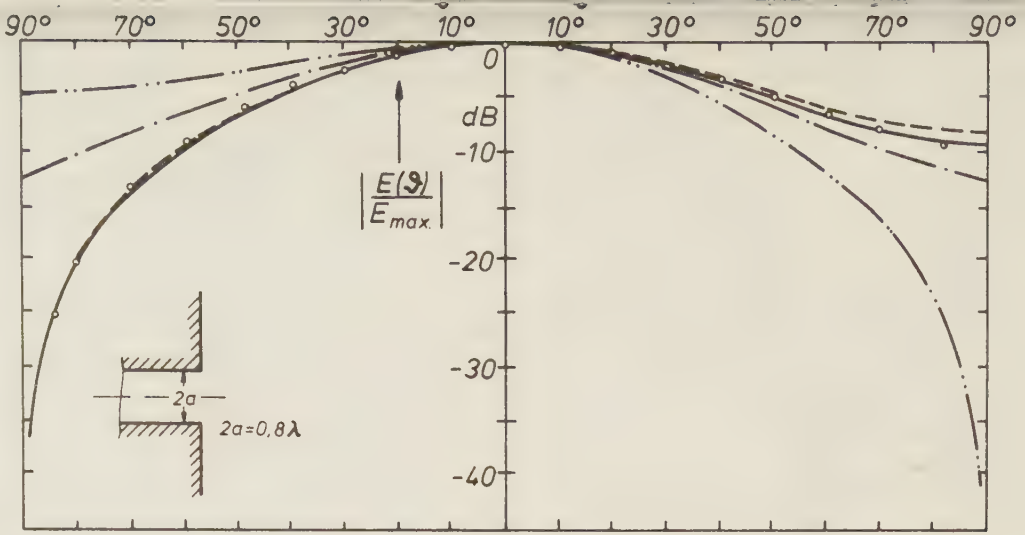


Abb. 4.11 Verlauf des elektrischen und des magnetischen Feldes in der Öffnungsebene einer Rundhohlleitung vom Durchmesser $2a = 0,8\lambda$ im unendlich ausgedehnten ebenen Schirm nach Momentenmethode ————, Verfahren ER – – – – –, Verfahren HR —·—·—. Die Bezeichnungen E_1, E_2, H_1 und H_2 wurden analog Gln. (4.13,14) gewählt. E_o ist aufgrund der Normierung in Gl. (4.10a) das 0,49-fache des Wertes der elektrischen Feldstärke der einfallenden Welle in der Mitte der Hohlleitung.



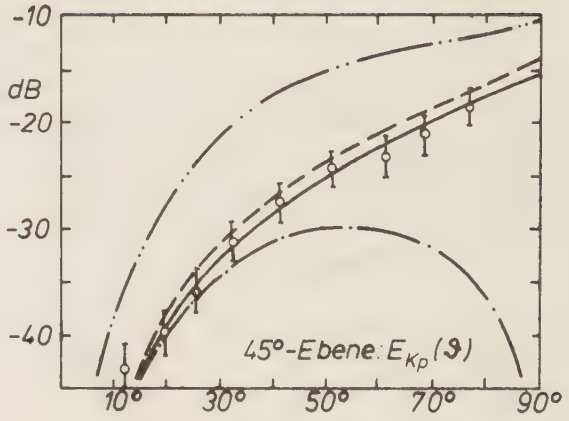


Abb. 4.12

Verlauf des Fernfeldes und der Kreuzpolarisation einer Hohlleitung vom Durchmesser 2a = 0,8λ im unendlich ausgedehnten ebenen Schirm nach

Momentenmethode ——————,

Verfahren ER — — — — —,

Verfahren HR ——··——··——,

Verfahren EHR ——·——·——

und für Messungen ○ ○ ⊢⊣ ⊢⊣ .

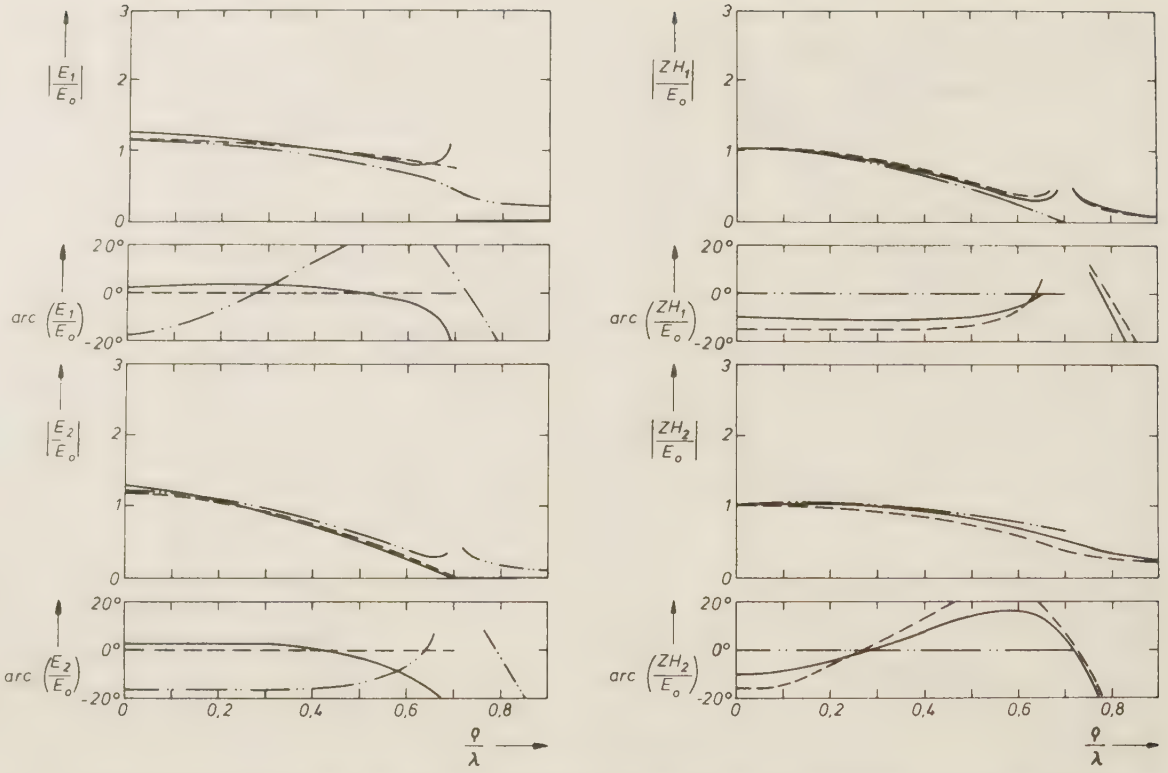
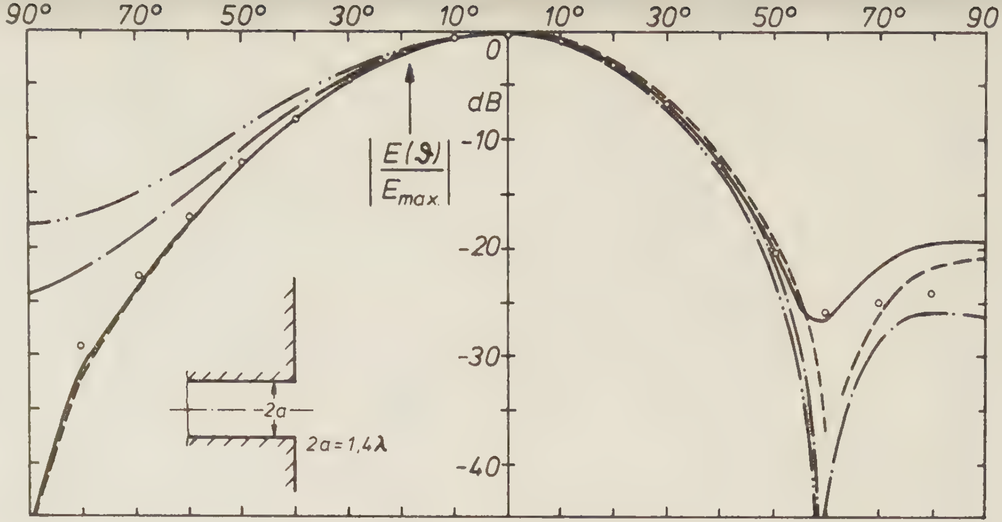


Abb. 4.13 Verlauf des elektrischen und des magnetischen Feldes in der Öffnungsebene einer Rundhohlleitung vom Durchmesser $2a = 1{,}4\lambda$ im unendlich ausgedehnten ebenen Schirm nach Momentenmethode ————, Verfahren ER — — — — , Verfahren HR —·——·—.
Die Bezeichnungen E_1, E_2, H_1 und H_2 wurden analog Gln. (4.13,14) gewählt. E_o ist aufgrund der Normierung in Gl. (4.10a) das 0,857-fache des Wertes der elektrischen Feldstärke der einfallenden Welle in der Mitte der Hohlleitung.



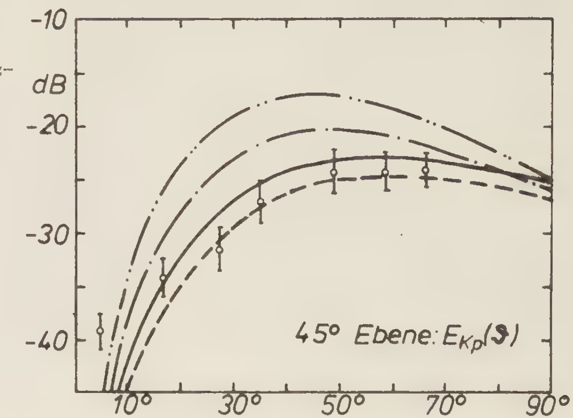


Abb. 4.14

Verlauf des Fernfeldes und der Kreuzpolarisation einer Hohlleitung vom Durchmesser 2a = 1,4λ im unendlich ausgedehnten ebenen Schirm nach

Momentenmethode ————— ,

Verfahren ER — — — — ,

Verfahren HR —··—··— ,

Verfahren EHR —·—·—

und für Messungen ∘ ∘ ⊥∘⊥ .

bei dem die E_{11}-Welle als erster höherer Wellentyp in der Hohlleitung ausbreitungsfähig wird, nimmt der Transmissionskoeffizient zunächst ab, um dann mit wachsendem $2a/\lambda$ wieder gegen 1 zu streben. Insgesamt macht Abb. 4.15 deutlich, daß eine die Hauptwelle führende Rundhohlleitung einen guten Wirkungsgrad als Strahler besitzt, wenn sie nicht gerade in der Nähe ihrer Grenzfrequenz betrieben

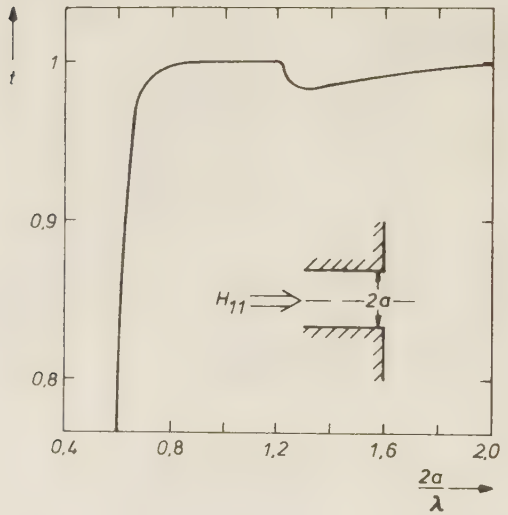


Abb. 4.15
Transmissionskoeffizient t einer Rundhohlleitungsöffnung im unendlich ausgedehnten ebenen Schirm idealer Leitfähigkeit in Abhängigkeit vom Durchmesser 2a.

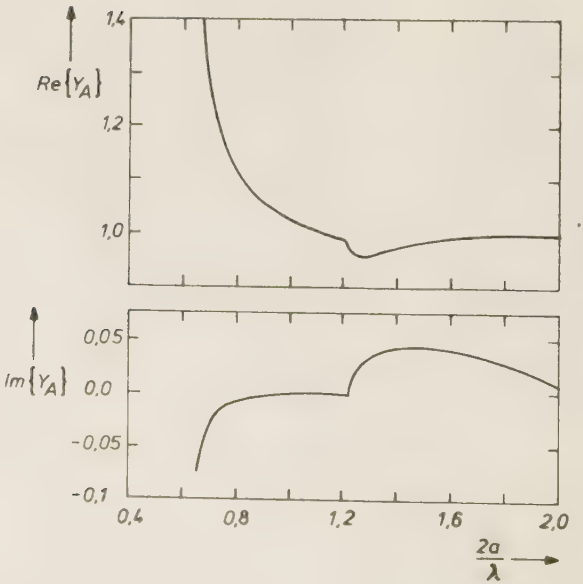


Abb. 4.16
Normierte Aperturadmittanz einer Rundhohlleitungsöffnung im unendlich ausgedehnten ebenen Schirm idealer Leitfähigkeit in Abhängigkeit vom Durchmesser 2a.

wird. In Abb. 4.16 ist die normierte Aperturadmittanz der Hauptwelle nach Gl. (4.17) in Abhängigkeit vom Hohlleitungsdurchmesser dargestellt. Der Verlauf stimmt bis auf das Vorzeichen der Suszeptanz $\mathrm{Im}\{Y_A\}$ sehr gut mit dem überein, den Mishustin [75] aus einem stationären Ausdruck gewonnen hat. Messungen liefern den gleichen Verlauf wie die Momentenlösung [76].

Abb. 4.17a zeigt die maximale Kreuzpolarisation nach verschiedenen Berechnungsverfahren in Abhängigkeit vom Hohlleitungsdurchmesser. Die Ergebnisse des Verfahrens ER stimmen wieder gut mit denen der Momentenlösung überein, während die anderen Näherungsverfahren keine zuverlässigen Aussagen über die Kreuzpolarisation liefern. Den gleichen Eindruck vermittelt auch Abb. 4.17b, in der die 12 dB-Breiten in E- und H-Ebene dargestellt sind. Hier stimmen die Ergebnisse nach dem Verfahren ER so gut mit denen der Momentenlösung überein, daß sie im Rahmen der Zeichengenauigkeit nicht unterschieden werden können.

Zusammenfassend kann man also aufgrund der in Abbn. 4.12-17 dargestellten Ergebnisse sagen, daß für Rundhohlleitungen im unendlich ausgedehnten ebenen Schirm nur das Verfahren ER bei allen Durchmessern zuverlässige Näherungswerte für den Feldverlauf in der Öffnung, das Fernfeld und die Kreuzpolarisation liefert. Dieses Ergebnis steht im Gegensatz zu dem bei der Beugung einer ebenen Welle an der kreisförmigen Öffnung im unendlich ausgedehnten Schirm [36]. Hier liefert das Verfahren HR die bessere Näherung. Dieses Verhalten ist verständlich, wenn man die Aperturfelder vergleicht. Bei der Blende im ebenen Schirm ist der Verlauf der magnetischen Feldstärke in der Öffnung identisch mit dem der einfallenden Welle, und die Vernachlässigung der magnetischen Feldstärke auf dem Rand der Öffnung bedeutet zumindest bei großen Öffnungen keinen wesentlichen Fehler. Der Ansatz des Verfahrens HR beschreibt also das tatsächliche Feld in der Öffnungsebene recht gut. Der Verlauf der elektrischen Feldstärke weicht dagegen erheblich von dem der einfallenden Welle ab (vergl. Abbn. 4.3,4), so daß das Verfahren ER von einer unrealistischen Annahme ausgeht. Bei der Hohlleitungsöffnung im ebenen Schirm liegen die Verhältnisse anders: hier stimmt der tatsächliche Verlauf der elektrischen Feldstärke in der Schirmebene bei allen Durchmessern, der Verlauf der magnetischen Feldstärke in der Schirmebene nur bei großen Öffnungsdurchmessern mit dem der einfallenden Welle gut überein. Berechnungen, die nicht im einzelnen dargestellt sind, zeigen, daß die nach den Näherungsverfahren gewonnenen Ergebnisse für das Fernfeld eines Rundhohlleitungsstrahlers sich mit größer werdenden Durchmessern mehr und mehr nähern. Im Falle des Hohlleitungsstrahlers

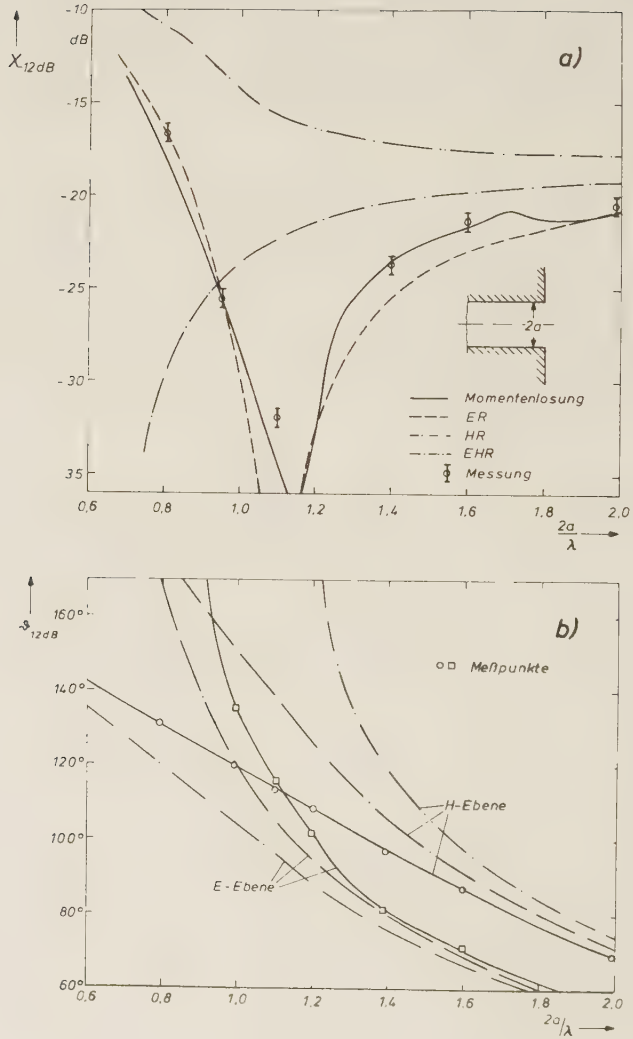


Abb. 4.17 Maximale Kreuzpolarisation (a) und 12 dB-Breiten in E- und H-Ebene (b) eines Hohlleitungsstrahlers im unendlich ausgedehnten ebenen Schirm als Funktion des Öffnungsdurchmessers.

darf die Genauigkeit der Ergebnisse des Verfahrens ER als voll ausreichend für die Dimensionierung angesehen werden, wenn man Fertigungstoleranzen und mögliche Meßfehler beachtet.

Weiterhin entnimmt man Abb.4.17a, daß ein optimaler Hohlleitungsdurchmesser im Hinblick auf möglichst geringe Kreuzpolarisation existiert. Für

$$1{,}04 \leq 2a/\lambda \leq 1{,}22,$$

d. h. für eine Bandbreite von ±8% ist $X_{-12\ dB}$ kleiner als -30 dB. Der Verlauf z. B. des transversalen elektrischen Feldes der H_{11}-Welle (Abb. 4.18) zeigt,

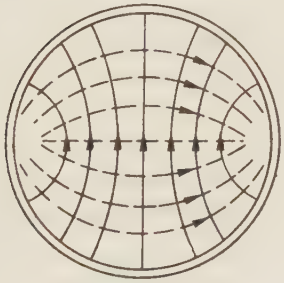


Abb. 4.18 Transversale Feldverteilung der H_{11}-Welle in der Rundhohlleitung.
——— *elektrische Feldlinien*
– – – *magnetische Feldlinien*

daß es neben der vorherrschenden y-Komponente auch eine x-Komponente gibt. In Abschnitt 2.2.3 ist darauf hingewiesen worden, daß eine Flächenstrombelegung mit x- und y-Komponenten unter der Bedingung (2.14a) ein kreuzpolarisationsarmes Strahlungsfeld erzeugt. Die Nachprüfung ergibt, daß in dem genannten 2a/λ-Bereich diese Bedingung weitgehend erfüllt ist.

4.4 Die quadratische Hohlleitungsöffnung im unendlich ausgedehnten ebenen Schirm idealer Leitfähigkeit

Wie bei der Rundhohlleitung geht man bei der Berechnung der Abstrahlung einer Rechteckhohlleitung häufig davon aus, daß die Öffnung in einem unendlich ausgedehnten ebenen Schirm idealer Leitfähigkeit liegt. Die folgenden Ausführungen gelten allgemein für Hohlleitungen mit rechteckigem Querschnitt, wenn auch numerische Ergebnisse nur für quadratische Querschnitte angegeben werden, weil

diese Leitung wie die Rundhohlleitung geeignet ist, zwei gleiche Felder orthogonaler Polarisationen abzustrahlen.

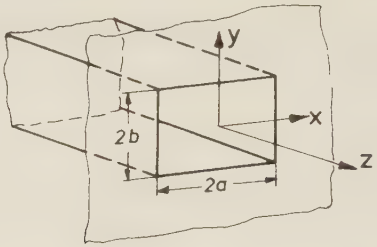


Abb. 4.19 Koordinatensystem für die Öffnung einer Rechteckhohlleitung im unendlich ausgedehnten ebenen Schirm.

Für die normierten Transversalfeldstärken in der Rechteckhohlleitung mit den Kantenlängen 2a und 2b gilt unter Beachtung von Gl. (3.26) bei den H-Wellen:

$$\vec{e}^{H}_{mn} = B_{mn} \{\vec{u}_x \frac{n}{2b} \cos[\frac{m\pi}{2a}(x+a)] \sin[\frac{n\pi}{2b}(y+b)] - \vec{u}_y \frac{m}{2a} \sin[\frac{m\pi}{2a}(x+a)] \cos[\frac{n\pi}{2b}(y+b)]\},$$

mit (4.18a)

$$m, n = 0,1,2,... \qquad \text{und } m + n \neq 0,$$

bei den E-Wellen:

$$\vec{e}^{E}_{mn} = B_{mn} \{\vec{u}_x \frac{m}{2a} \cos[\frac{m\pi}{2a}(x+a)] \sin[\frac{n\pi}{2b}(y+b)] + \vec{u}_y \frac{n}{2b} \sin[\frac{m\pi}{2a}(x+a)] \cos[\frac{n\pi}{2b}(y+b)]\},$$

mit (4.18b)

$$m, n = 1,2,3,....$$

Der Normierungsfaktor ist für H- und E-Wellen gleich:

$$B_{mn} = \sqrt{\frac{a\, b\, \varepsilon_m \varepsilon_n}{(mb)^2 + (na)^2}} \qquad \text{mit} \qquad \varepsilon_{m,n} = \begin{cases} 1 \text{ für } m,n = 0 \\ 2 \text{ für } m,n \geq 1. \end{cases}$$

Die Hohlleitungsadmittanzen berechnen sich für H-Wellen zu:

$$Y^H_{mn} = \frac{\beta^H_{mn}}{\omega\mu_o\mu_r} = \frac{1}{kZ} \begin{cases} [k^2 - (\frac{m\pi}{2a})^2 - (\frac{n\pi}{2b})^2]^{1/2} & \text{für } k^2 \geq (\frac{m\pi}{2a})^2 + (\frac{n\pi}{2b})^2 \\ -j[(\frac{m\pi}{2a})^2 + (\frac{n\pi}{2b})^2 - k^2]^{1/2} & \text{für } k^2 < (\frac{m\pi}{2a})^2 + (\frac{n\pi}{2b})^2, \end{cases} \tag{4.19a}$$

$$Y^E_{mn} = \frac{\omega\varepsilon_o\varepsilon_r}{\beta^E_{mn}} = \frac{k}{Z} \begin{cases} [k^2 - (\frac{m\pi}{2a})^2 - (\frac{n\pi}{2b})^2]^{-1/2} & \text{für } k^2 \geq (\frac{m\pi}{2a})^2 + (\frac{n\pi}{2b})^2 \\ -j[(\frac{m\pi}{2a})^2 + (\frac{n\pi}{2b})^2 - k^2]^{-1/2} & \text{für } k^2 < (\frac{m\pi}{2a})^2 + (\frac{n\pi}{2b})^2. \end{cases} \tag{4.19b}$$

Näherungslösungen für das Strahlungsfeld findet man wieder mit Hilfe von Gln. (3.13-15) und (6.8,9). Beim Integralgleichungsverfahren werden in Gl. (3.23) die beiden Räume durch die Admittanzmatrizen $\mathbf{T}^{HR}_{\square}$ und $\mathbf{T}^{HI}_{\square}$ beschrieben, also

$$(\mathbf{T}^{HR}_{\square} + \mathbf{T}^{HI}_{\square})\ \mathbf{V} = \mathbf{I}^{HI}_{\square}. \tag{4.20}$$

Als Basisfunktionen werden jetzt die Ausdrücke nach Gl. (4.9) verwendet [77].

Im folgenden wird davon ausgegangen, daß die Hauptwelle, also die H_{10}-Welle, mit der transversalen elektrischen Feldstärke $E_o \vec{e}^H_{10}$ von $z = -\infty$ auf die Öffnungsfläche in $z = 0$ trifft. Aufgrund der doppelten Spiegelsymmetrie der Rechteckhohlleitung und der Symmetrieeigenschaften der H_{10}-Welle können in der Öffnung nur H-Wellen mit den Indizes $m = 1,3,5,\ldots$ und $n = 0,2,4,\ldots$ sowie E-Wellen mit den Indizes $m = 1,3,5,\ldots$ und $n = 2,4,6,\ldots$ angeregt werden. Für die transversalen Feldstärkevektoren aus Gln. (4.18a,b) kann man daher

$$\vec{e}^H_{mn} = B_{mn}\,(-1)^{\frac{m+n+1}{2}}\,[\vec{u}_x \frac{n}{2b} \sin(\frac{m\pi x}{2a}) \sin(\frac{n\pi y}{2b}) + \vec{u}_y \frac{m}{2a} \cos(\frac{m\pi x}{2a}) \cos(\frac{n\pi y}{2b})],$$

mit

$$m = 1,3,5,\ldots, \quad n = 0,2,4,\ldots,$$

$$\vec{e}^E_{mn} = B_{mn}\,(-1)^{\frac{m+n+1}{2}}\,[\vec{u}_x \frac{m}{2a} \sin(\frac{m\pi x}{2a}) \sin(\frac{n\pi y}{2b}) + \vec{u}_y \frac{n}{2b} \cos(\frac{m\pi x}{2a}) \cos(\frac{n\pi y}{2b})],$$

mit

$$m = 1,3,5,\ldots, \quad n = 2,4,6,\ldots,$$

schreiben. Die Berechnung der Matrizen aus Gl. (4.20) ist im Anhang näher erläutert ($\mathbf{T}^{HR}_{\square}$ in 6.4.1, $\mathbf{T}^{HI}_{\square}$ in 6.4.2, $\mathbf{I}^{HI}_{\square}$ in 6.4.3).

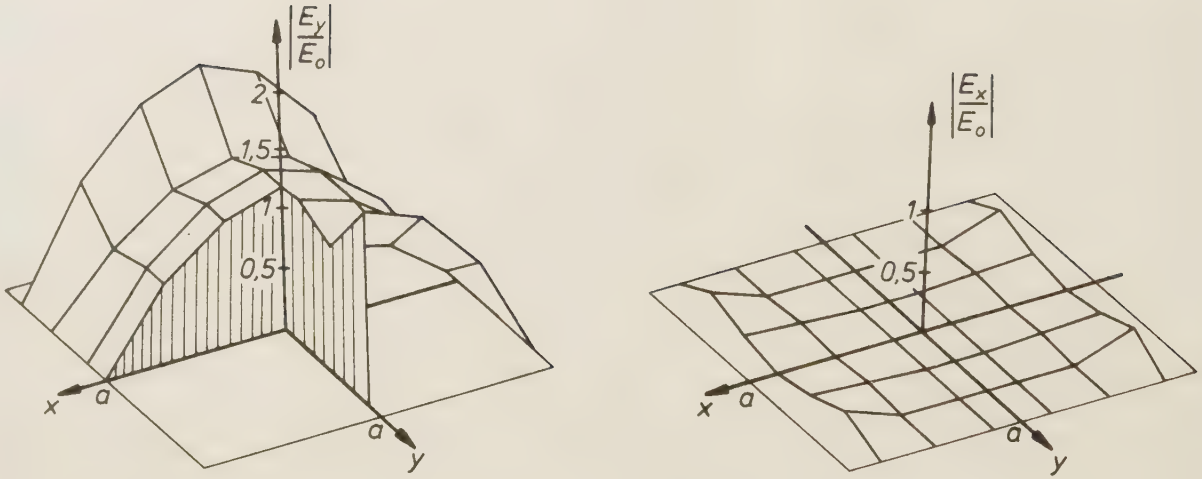
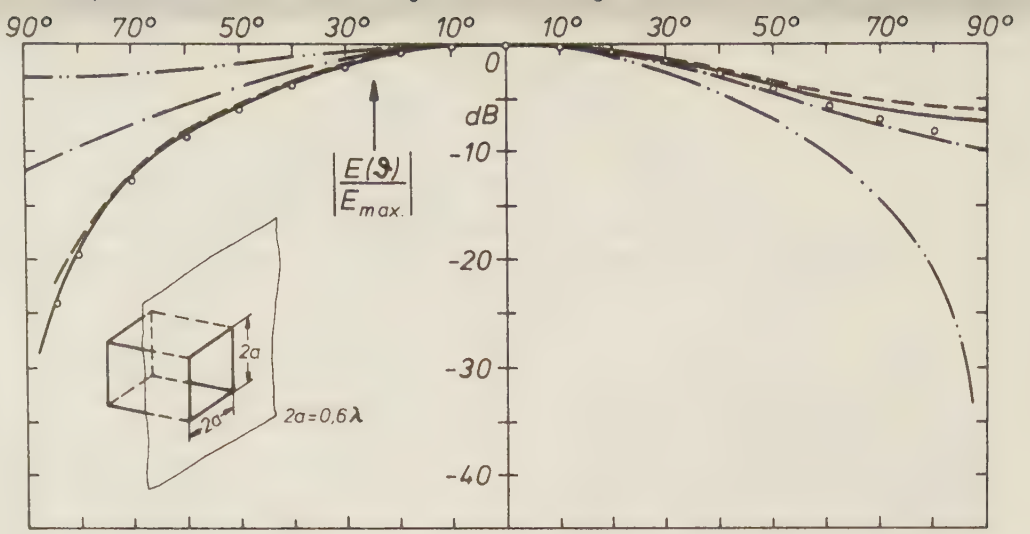


Abb. 4.20 Betrag der elektrischen Feldstärke in der Öffnung einer quadratischen Hohlleitung mit der Kantenlänge 2a = 0,6λ im unendlich ausgedehnten ebenen Schirm (Momentenlösung).



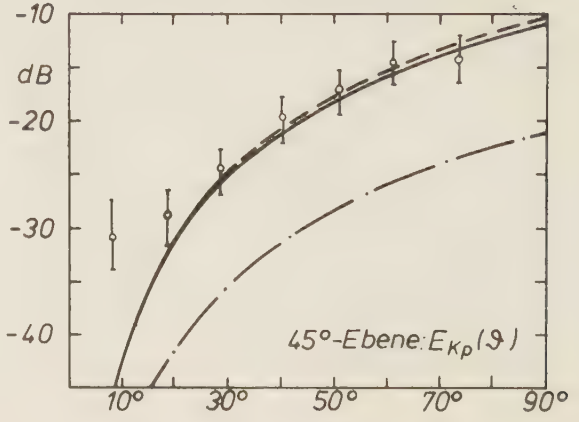


Abb. 4.21

Verlauf des Fernfeldes und der Kreuzpolarisation einer quadratischen Hohlleitung mit der Kantenlänge 2a = 0,6λ im unendlich ausgedehnten ebenen Schirm nach

Momentenmethode ——————,

Verfahren EH — — — —,

Verfahren HR —··—··—,

Verfahren EHR —·—·—

und für Messungen ○○ .

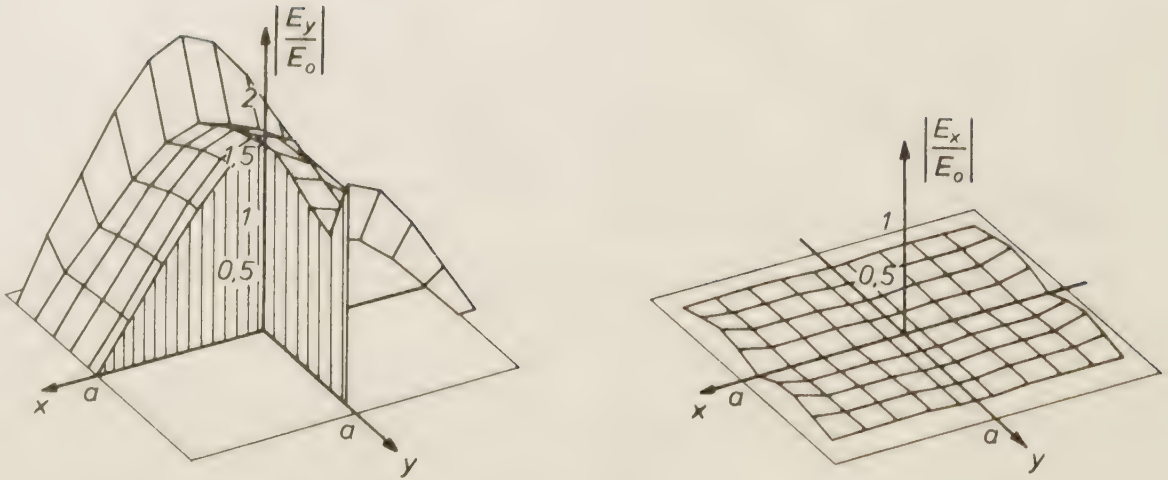


Abb. 4.22 Betrag der elektrischen Feldstärke in der Öffnung einer quadratischen Hohlleitung mit der Kantenlänge 2a = 1,4λ im unendlich ausgedehnten ebenen Schirm (Momentenlösung).

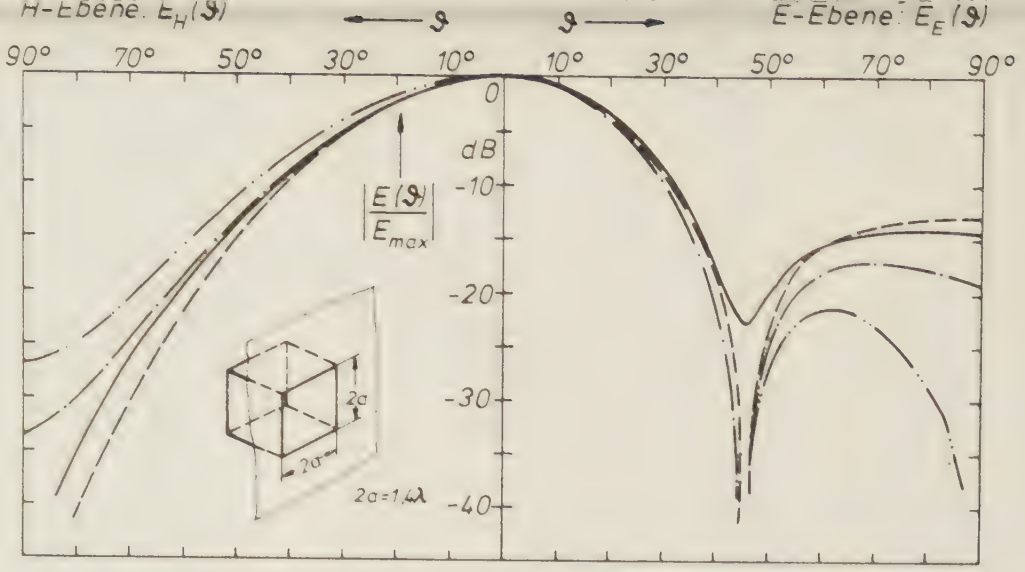


Abb. 4.23

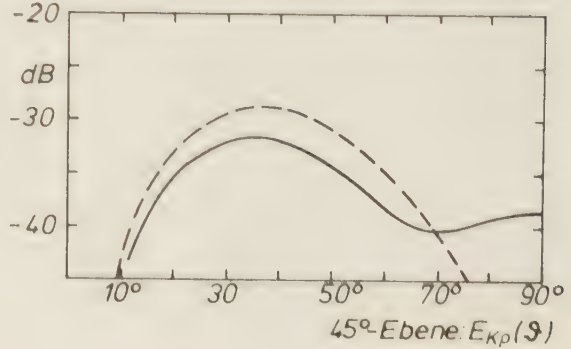
Verlauf des Fernfeldes und der Kreuzpolarisation einer quadratischen Schlitzöffnung mit der Kantenlänge 2a = 1,4λ im unendlich ausgedehnten ebenen Schirm nach:

Momentenmethode ————,

Vergleichsmethode VK — — — —,

Vergleichsmethode VA ——··——··

und vergleichbare Messung ——·——·—.



In Abbn. 4.20-23 sind der Verlauf des elektrischen Feldes in der Hohlleitungsöffnung sowie das Fernfeld für zwei quadratische Hohlleitungsstrahler mit den Kantenlängen 2a = 0,6λ und 1,4λ nach verschiedenen Berechnungsverfahren dargestellt. Obwohl die Kantenbedingung nicht in den Lösungsansatz eingeht, weisen die Normalkomponenten des nach der Momentenmethode gewonnenen elektrischen Feldes in der Öffnung einen starken Anstieg am Rand auf (Abbn. 4.20,22). Das E-Feld besitzt hier eine nicht unerhebliche x-Komponente. Die Verfahren ER und HR liefern im Falle einer quadratischen Öffnung dasselbe Ergebnis für die Kreuzpolarisation (Abbn. 4.21,23). Insgesamt zeigt sich jedoch wieder, daß das Verfahren ER die besten Näherungswerte für das Fernfeld bereitstellt. Da sich ein analytischer Ausdruck für die φ-Abhängigkeit und damit den φ-Wert der Ebene maximaler Kreuzpolarisation nicht angeben läßt, wurde zur einheitlichen Beschreibung der Kreuzpolarisationseigenschaften die 45°-Ebene als Bezugsebene gewählt. Abb. 4.24 zeigt Beispiele für die maximale Kreuzpolarisation im Fernfeld zweier

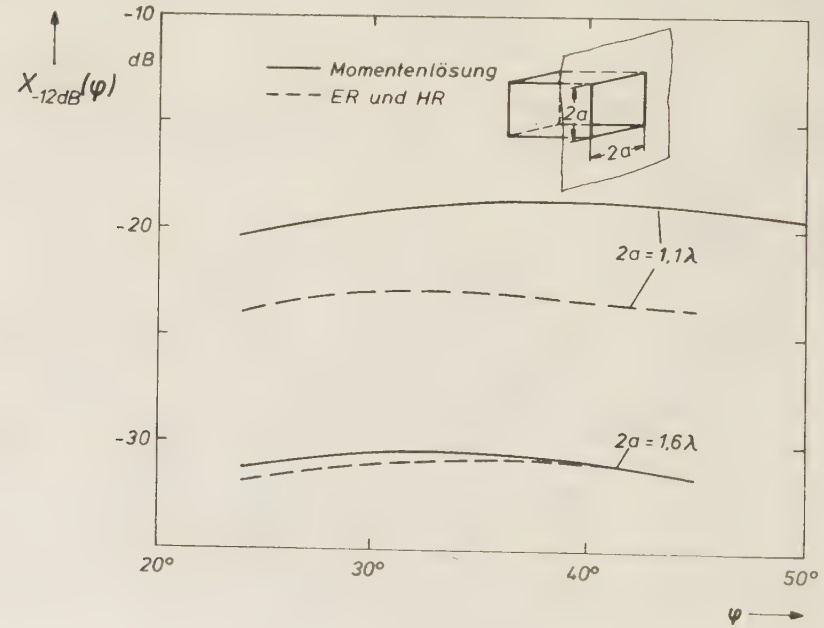


Abb. 4.24 Maximale Kreuzpolarisation im Fernfeld eines quadratischen Hohlleitungsstrahlers im unendlich ausgedehnten ebenen Schirm in Abhängigkeit vom Winkel φ.

quadratischer Hohlleitungsöffnungen im ebenen Schirm als Funktion vom Winkel φ. Dabei zeigt sich, daß die Lage des Maximums der Kreuzpolarisation von der Größe der Hohlleitungsöffnung abhängt. Allerdings ist der Verlauf in der Umgebung des Maximums sehr flach, und die für das gesamte Strahlungsfeld berechnete maximale Kreuzpolarisation weicht von der in der Ebene $\varphi = 45^{\circ}$ ermittelten im Bereich $0{,}6 < 2a/\lambda < 2{,}0$ um weniger als 1,2 dB ab. Für Aussagen über die Verwendbarkeit eines Hohlleitungsstrahlers mit quadratischem Querschnitt als kreuzpolarisationsarme Antenne reicht daher die Kenntnis der maximalen Kreuzpolarisation in der 45°-Ebene aus.

Abb. 4.25 zeigt die maximale Kreuzpolarisation des Fernfeldes in der 45°-Ebene für eine Hohlleitung quadratischen Querschnitts in Abhängigkeit von der Kantenlänge. Das Berechnungsverfahren EHR liefert wie bei der quadratischen Öffnung im ebenen Schirm wesentlich zu niedrige Werte für die Kreuzpolarisation. Im Gegensatz zur Rundhohlleitung (Abb. 4.17a) nimmt bei der quadratischen Hohlleitung die maximale Kreuzpolarisation mit größer werdender Öffnungsfläche ab, wenn man von gewissen Resonanzeffekten bei der Momentenlösung absieht. Daraus kann man schließen, daß bei größeren Kantenlängen die y-Komponente des elektrischen Feldes überwiegt und Gl. (2.13) in etwa erfüllt ist. Die Kreuzpolarisationswerte nach der Momentenlösung weichen von denen nach dem Verfahren ER bis zu 4 dB ab. Die in der Momentenlösung berücksichtigten höheren Wellentypen, die in der Öffnung der Hohlleitung angeregt werden und eine x-Komponente des elektrischen Feldes haben können, führen zu einer Erhöhung oder zu einer Verminderung der Kreuzpolarisation.

Sucht man einen möglichst kreuzpolarisationsarmen Erreger für eine Spiegelantenne, der zwei orthogonale Felder mit gleichem Diagramm abstrahlt, so empfiehlt es sich, bei einem Öffnungswinkel $\vartheta_{12\ dB} > 104^{\circ}$ die Rundhohlleitung, bei $\vartheta_{12\ dB} < 100^{\circ}$ die Hohlleitung mit quadratischem Querschnitt einzusetzen (Abbn. 4.17,25). Dabei liefern sowohl runde als auch quadratische Hohlleitungsstrahler nur bei speziellen Abmessungen (Durchmesser = $1{,}12\lambda$, Kantenlänge = $0{,}9\lambda$) rotationssymmetrische Diagramme.

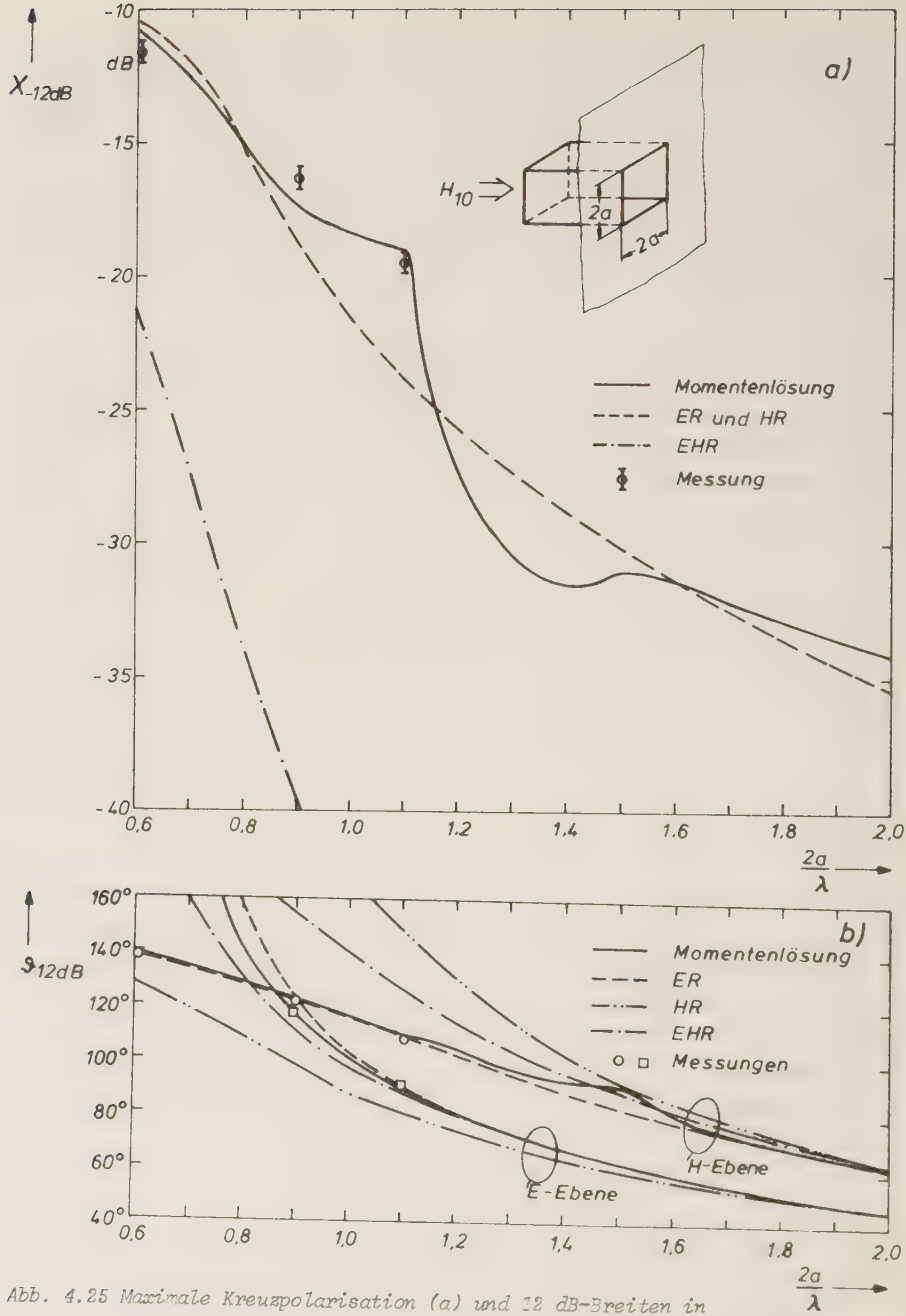


Abb. 4.25 Maximale Kreuzpolarisation (a) und 12 dB-Breiten in E- und H-Ebene (b) eines quadratischen Hohlleitungsstrahlers im unendlich ausgedehnten ebenen Schirm in Abhängigkeit von der Kantenlänge.

4.5 Der Rundhohlleitungsstrahler mit endlicher Wandstärke

In Antennensystemen, die mit Hohlleitungsstrahlern ausgerüstet sind, liegt die Öffnung der Hohlleitung nicht in einem unendlich ausgedehnten Schirm, wie in Abschnitt 4.3 zur Vereinfachung der Rechnung angenommen wurde. Vielmehr ist der Strahler im allgemeinen als abgeschnittenes Rohr endlicher Wandstärke ausgeführt. Da die Einbeziehung der Wandstärke in die Strahlungsfeldberechnung recht aufwendig ist, sind aus der Literatur nur wenige Untersuchungen bekannt [41, 42], die jedoch keinen allgemeinen quantitativen Zusammenhang von Wandstärke und Kreuzpolarisation liefern. Wie die folgenden Berechnungen und Messungen zeigen, führt bei kleinen Hohlleitungsdurchmessern die Reduzierung der Wandstärke zu einer Verminderung der Kreuzpolarisation.

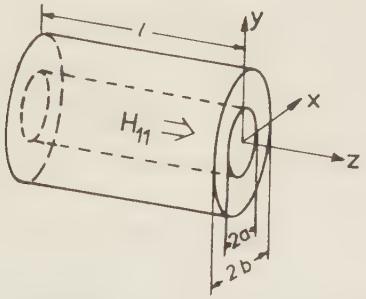


Abb. 4.26 Rundhohlleitung endlicher Wandstärke.

Bei der Berechnung der Strahlungseigenschaften einer Rundhohlleitung endlicher Wandstärke wird von einer Anordnung nach Abb. 4.26 ausgegangen. Dabei ist die Länge l des Strahlers wegen der endlichen Zahl der Stützpunkte bei der Momentenmethode begrenzt. Das Rohr ist an der Rückseite geschlossen, an der Vorderseite offen. Auf die Öffnung trifft wieder die H_{11}-Welle. Dieses vereinfachte Abstrahlungsmodell, bei dem der Einfluß von Speiseleitung und Halterung vernachlässigt wird, kann als Zwei-Raum-Problem nach Abschnitt 3.3.4 behandelt werden. Dazu wird auf der Oberfläche des Strahlers ein adäquates Koordinatennetz eingeführt: φ ist die übliche Zylinderkoordinate, t bezeichnet Koordinatenlinien, die tangential zur Oberfläche und senkrecht zu den φ-Linien verlaufen, und der Nullpunkt liegt in der Mitte der Öffnungsfläche. Mit dem Einheitsvektor in t-Richtung und

dem Normaleneinheitsvektor $\vec{n}$ gilt $\vec{n} = \vec{u}_t \times \vec{u}_\varphi$. Auf der Oberfläche des Strahlers entsprechend Abb. 4.26 hat $\vec{u}_t$ folgende Richtungen:

$$\vec{u}_t = \begin{cases} \vec{u}_\rho & \text{im Bereich } 0 \le t \le b, \\ -\vec{u}_z & \text{im Bereich } b < t \le b+1 \\ -\vec{u}_\rho & \text{im Bereich } b+1 < t \le 2b+1. \end{cases}$$

Für die magnetische Flächenstromdichte werden Basisfunktionen ähnlich wie in Gl. (4.7) gewählt:

$$\begin{aligned} \vec{M}^t_{mn}(\rho,\varphi) &= \vec{u}_t \frac{1}{\rho} D(t - t_n) \cos(m\varphi), \\ \vec{M}^\varphi_{mn}(\rho,\varphi) &= -\vec{u}_\varphi \frac{1}{\rho} D(t - t_n) \sin(m\varphi). \end{aligned} \tag{4.21}$$

Als Basisfunktionen der elektrischen Flächenstromdichte eignen sich

$$\begin{aligned} \vec{J}^t_{mn}(\rho,\varphi) &= \vec{u}_t \frac{1}{\rho} D(t - t_n) \sin(m\varphi), \\ \vec{J}^\varphi_{mn}(\rho,\varphi) &= \vec{u}_\varphi \frac{1}{\rho} D(t - t_n) \cos(m\varphi). \end{aligned} \tag{4.22}$$

Nach der Methode von Galerkin werden die Gewichtsfunktionen

$$\vec{U}^\mu_{mn} = \vec{J}^\mu_{mn}, \qquad \vec{W}^\mu_{mn} = \vec{M}^\mu_{nm}, \qquad \text{für } \mu = t, \varphi$$

gewählt. Die Berechnung der zugehörigen Matrizen ist im Anhang 6.3 beschrieben. Aufgrund der φ-Abhängigkeit der einfallenden Welle und der Rotationssymmetrie der Struktur läßt sich das Strahlungsfeld durch Ausdrücke analog Gln. (4.13-16) beschreiben. Die maximale Kreuzpolarisation tritt wieder in der 45^o-Ebene auf.

Im Abschnitt 3.3.4 wurden die drei Matrizen

$\mathbf{T}^{w1}$ (Gl. (3.39a)) aus der EFIE *),
$\mathbf{T}^{w2}$ (Gl. (3.39b)) aus der MFIE *) und
$\mathbf{T}^{w3}$ (Gl. (3.45)) aus der kombinierten Quellengleichung

abgeleitet. Wie bereits erwähnt wurde, beschreiben sie zwar alle drei die Wirkung eines beliebig begrenzten Teilraumes auf die Öffnungsfläche, aber nur die kombinierte Quellengleichung liefert beim Auftreten innerer Resonanzen praktikable Lösungen, wie Harrington gezeigt hat [45]. Dies wird in Abb. 4.27a deut-

*) siehe Fußnote S. 36.

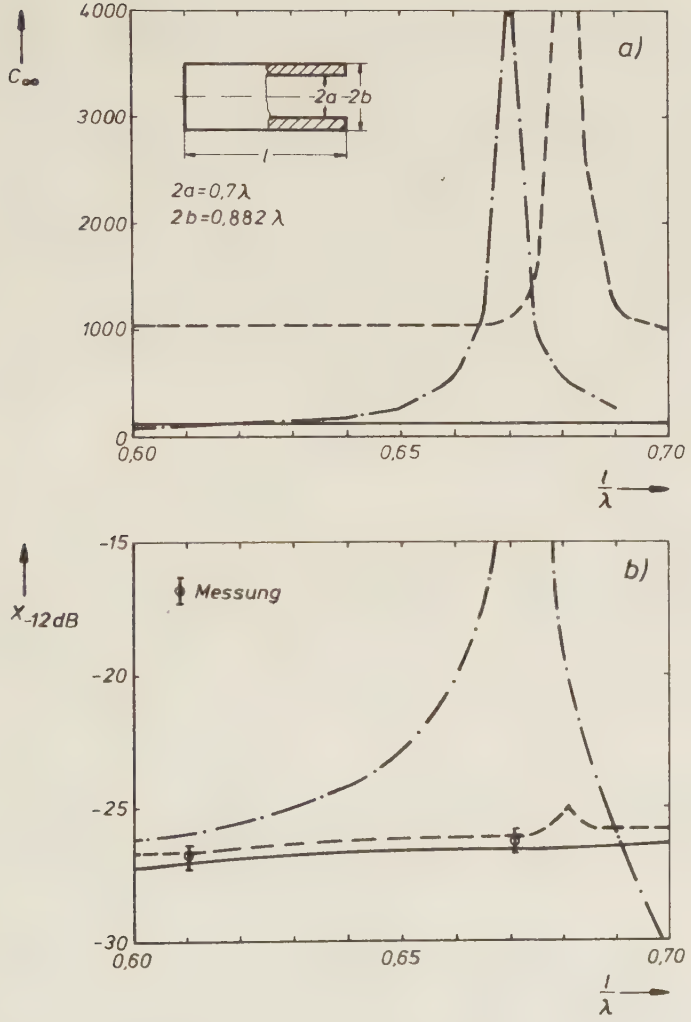


Abb. 4.27 Abhängigkeit der

a) Konditionszahl C_∞ nach Gl. (3.53),

b) maximalen Kreuzpolarisation

für eine Hohlleitung endlicher Wandstärke von der Länge l bei Berechnung mit Hilfe der

– – – – – – EFIE (C_∞ von $\mathbf{T}^J$),

——·——·—— MFIE (C_∞ von $[\mathbf{D}^J - \mathbf{S}^J]$),

———————— kombinierten Quellengleichung (C_∞ von $[\mathbf{S}^X + \mathbf{T}^C]$).

lich, in der für ein konkretes Beispiel die Konditionszahlen der Matrizen dargestellt sind, die zur Berechnung von $\mathbf{T}^{w1}$, $\mathbf{T}^{w2}$ und $\mathbf{T}^{w3}$ invertiert werden müssen: nur die bei der kombinierten Quellengleichung auftretenden Matrizen $[\mathbf{S}^X + \mathbf{T}^C]$ sind für alle Längen l gut konditioniert. Die Konditionszahl von $[\mathbf{D}^J - \mathbf{S}^J]$ wird bei $l = 0{,}67\lambda$, die von $\mathbf{T}^J$ bei einem etwas höheren Wert von l sehr groß. Dies hat seine Ursache darin, daß in einem kreiszylindrischen Hohlraum mit dem Durchmesser $2b = 0{,}882\lambda$ und der Länge $l = 0{,}67\lambda$ sowohl beim Randwert $\vec{E}_{tan} = 0$ als auch $\vec{H}_{tan} = 0$ eine Eigenschwingung (H_{111} oder E_{111}) existiert. Daher liefern EFIE und MFIE bei der Beugung am Zylinder gleicher Abmessungen keine brauchbare Lösung. Das höhere Niveau der Konditionszahl von $\mathbf{T}^J$ war zu erwarten, weil die EFIE eine Fredholmsche Integralgleichung erster Art ist, die bei der Lösung im allgemeinen zu größeren Ungenauigkeiten führt als eine Integralgleichung zweiter Art.

In Abb. 4.27b ist die Auswirkung der Konditionierung der Gleichungssysteme auf die Berechnung der Kreuzpolarisation dargestellt. Wie zu erwarten war, liefert die kombinierte Quellengleichung bei allen Längen zuverlässige Ergebnisse. Auch die EFIE liefert trotz der schlechten Konditionszahl des Gleichungssystems erstaunlich gute Fernfeldwerte. Der Grund hierfür ist darin zu sehen, daß die innere Resonanz mit der Randbedingung $\vec{E}_{tan} = 0$, wie auch bei Beugungsproblemen beobachtet wurde [46], keine Strahlung nach außen zur Folge hat.

Hier nicht wiedergegebene Konvergenz- und Stetigkeitsuntersuchungen in einem größeren Bereich der Parameter $2a/\lambda$, $2b/\lambda$ und l/λ zeigen, daß die Matrix $\mathbf{T}^{w3}$ die Wirkung des äußeren Teilraumes auf die Hohlleitungsöffnung jeweils am besten beschreibt. Sie wurde daher den folgenden Berechnungen zugrunde gelegt.

In Abb. 4.28 ist der Verlauf der maximalen Kreuzpolarisation und der 12 dB-Breite in Abhängigkeit vom Verhältnis Hohlleitungsdurchmesser zu Wellenlänge für verschiedene Wandstärken und Längen dargestellt. Ein Vergleich von Abb. 4.28a mit 4.17a zeigt, daß bei der Hohlleitung mit endlicher Wandstärke wie bei der im unendlich ausgedehnten Schirm die Kreuzpolarisation für $2a/\lambda \approx 1{,}2$ am geringsten ist. Die Kreuzpolarisationseigenschaften von Rundhohlleitungsstrahlern werden für $2a/\lambda < 1{,}0$ wesentlich, für $2a/\lambda > 1{,}4$ nur noch sehr wenig von der Wandstärke beeinflußt. Diesen Befund verdeutlicht auch Abb. 4.29a, in der die maximale Kreuzpolarisation für geeignet gewählte Durchmesser in Abhängigkeit von der Wandstärke dargestellt ist. Für den größten Hohlleitungsdurchmesser $2a/\lambda = 1{,}4$ ändert sich die maximale Kreuzpolarisation um weniger als 2 dB, für den

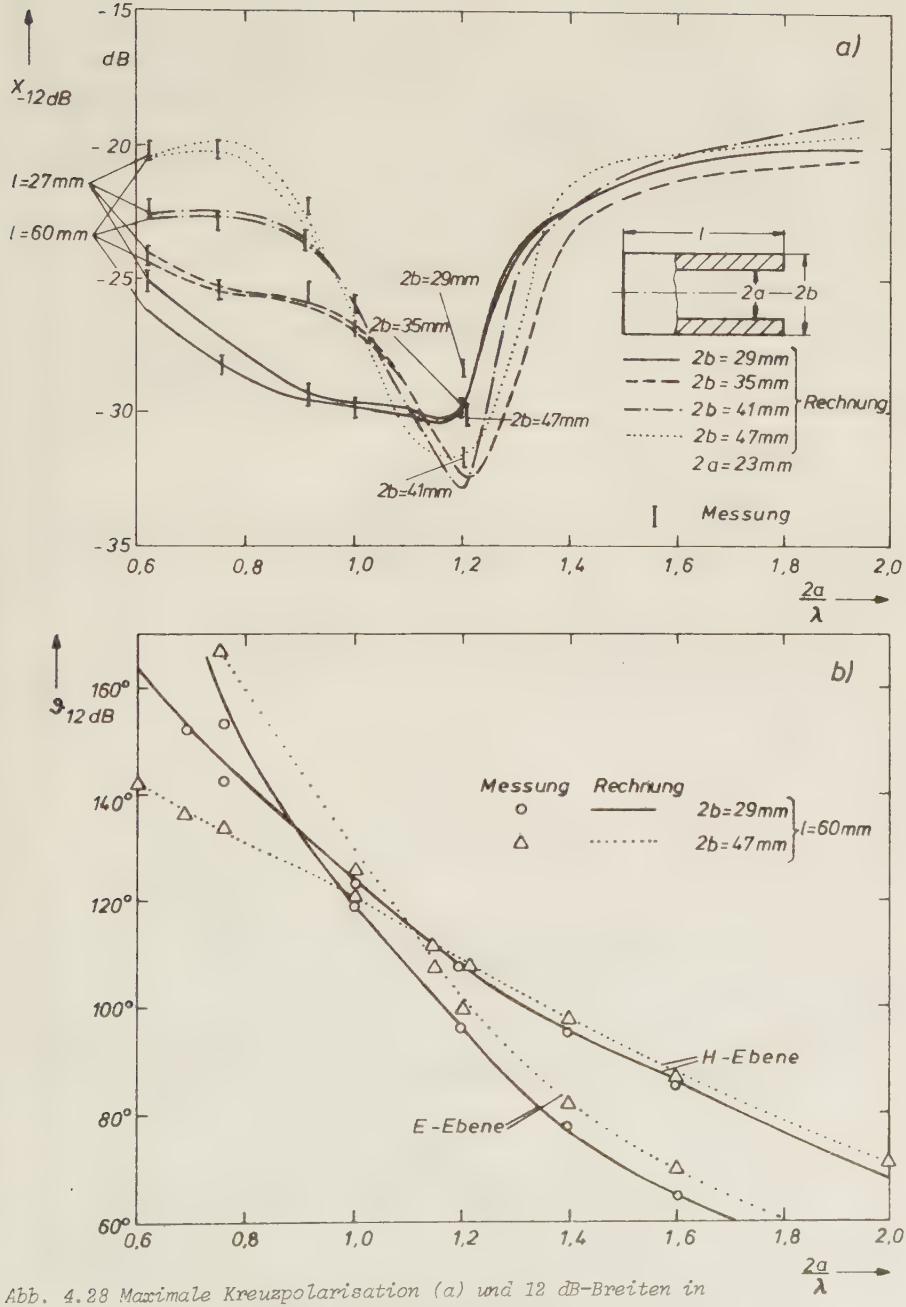


Abb. 4.28 Maximale Kreuzpolarisation (a) und 12 dB-Breiten in E- und H-Ebene (b) eines Rundhohlleitungsstrahlers endlicher Wandstärke in Abhängigkeit vom Innendurchmesser für verschiedene Außendurchmesser und Längen.

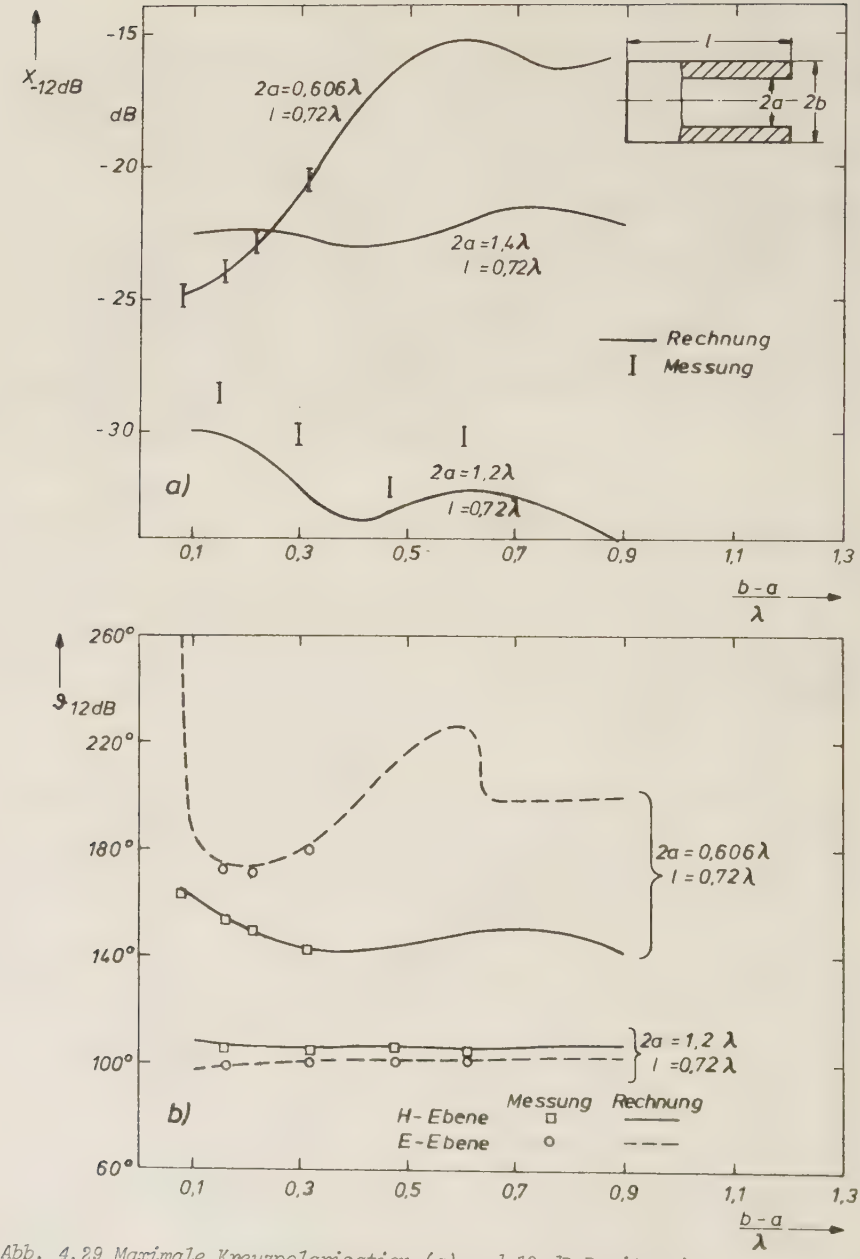


Abb. 4.29 Maximale Kreuzpolarisation (a) und 12 dB-Breiten in E- und H-Ebene (b) eines Rundhohlleitungsstrahlers in Abhängigkeit von der Wandstärke.

kleinsten ($2a/\lambda = 0{,}606$) dagegen um bis zu 10 dB. Die Abhängigkeit der maximalen Kreuzpolarisation von der Länge l (Abb. 4.28a) nimmt mit wachsendem $2a/\lambda$ ab und ist für $2a/\lambda > 1{,}2$ bei den hier untersuchten Längen im Rahmen der Zeichengenauigkeit nicht mehr feststellbar. Da bei praktisch eingesetzten Hohlleitungsstrahlern die Halterungen und die Speiseleitung einen weitaus größeren Einfluß auf das Strahlungsfeld haben als die Länge des Strahlers, wurde der Einfluß von l auf die Kreuzpolarisationseigenschaften nicht weiter untersucht. Abbn. 4.28b und 4.29b zeigen, daß die 12 dB-Breite in der H-Ebene kaum, in der E-Ebene jedoch durchaus von der Wandstärke beeinflußt wird. Auch dieser Effekt ist bei kleinen Werten $2a/\lambda$ ausgeprägter. Meßergebnisse stimmen gut mit der Rechnung überein, wodurch die Brauchbarkeit der Momentenlösung für das hier untersuchte Problem bestätigt wird.

Das in Abbn. 4.28 und 4.29 dargestellte und vorstehend beschriebene Kreuzpolarisationsverhalten von Rundhohlleitungsstrahlern mit endlicher Wandstärke läßt Öffnungsdurchmesser $2a < \lambda$ als besonders interessant erscheinen, weil hier die Berandung der Öffnung einen starken Einfluß auf die Kreuzpolarisation hat. Man kann daher vermuten, daß durch einen geeignet geformten Flansch das Strahlungsfeld und damit die Kreuzpolarisationseigenschaften wesentlich beeinflußt werden können.

4.6 Der Rundhohlleitungsstrahler mit speziell geformtem Rand

In der Literatur werden verschiedentlich Rundhohlleitungsstrahler beschrieben, deren Öffnung in einem Flansch mit konzentrischen Riefen liegt und die sich durch ein nahezu rotationssymmetrisches Strahlungsdiagramm sowie geringe Kreuzpolarisation auszeichnen [50 - 56]. Mit dem im Abschnitt 3.3.4 für die Momentenmethode beschriebenen Rechenprogramm lassen sich solche Strukturen streng behandeln. Hier wurde eine Anordnung mit einer konzentrischen Riefe entsprechend Abb. 4.30 untersucht.

Wie die Ergebnisse aus Abschnitt 4.5 zeigen, hat die Länge l, die aufgrund der begrenzten Zahl der Stützpunkte bis zu einigen Wellenlängen betragen kann, bei großer Flanschdicke, d. h. bei großem b_3/λ nur noch verschwindend geringen Einfluß auf das Strahlungsdiagramm. Die im folgenden dargestellten Ergebnisse

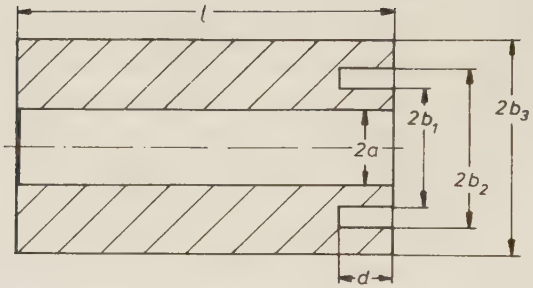


Abb. 4.30 Rundhohlleitung mit ringförmig gerieftem Rand.

der Momentenlösung wurden wie in Abschnitt 4.5 mit Hilfe der kombinierten Quellengleichung gewonnen.

Abb. 4.31 zeigt an einem Beispiel die Abhängigkeit der Kreuzpolarisation und der 12 dB-Breiten in E- und H-Ebene von der Tiefe d der konzentrischen Riefe bei sonst konstanten Abmessungen. Während die maximale Kreuzpolarisation einer Rundhohlleitung mit glattem Rand bei sonst gleichen Dimensionen etwa -25 dB beträgt, ergibt eine Riefe im Rand eine erhebliche Verbesserung im Bereich $0{,}25 < d/\lambda < 0{,}28$. Dabei ist das Strahlungsdiagramm nahezu rotationssymmetrisch mit einer 12 dB-Breite von 136^{0}. Messungen stimmen wiederum gut mit der Rechnung überein.

In Abbn. 4.32 und 4.33 ist der Einfluß des Abstandes zwischen Hohlleitungsöffnung und Riefe auf die Kreuzpolarisationseigenschaften im Fernfeld dargestellt, wobei einmal der Außendurchmesser der Hohlleitung und zum andern die Wandstärke jenseits der Riefe konstant gehalten wurden. Den Abbildungen entnimmt man:

(1) Es gibt einen optimalen Abstand zwischen Hohlleitungsöffnung und Riefe, bei dem die Kreuzpolarisation ein Minimum hat. Dieser optimale Abstand zeigt eine gewisse Abhängigkeit von Innen- und Außendurchmesser des Strahlers.

(2) Der Außendurchmesser wirkt sich bei kleinem Innendurchmesser wesentlich auf die Kreuzpolarisationseigenschaften aus. Für minimale Kreuzpolarisation muß die Wandstärke jenseits der Riefe möglichst klein sein.

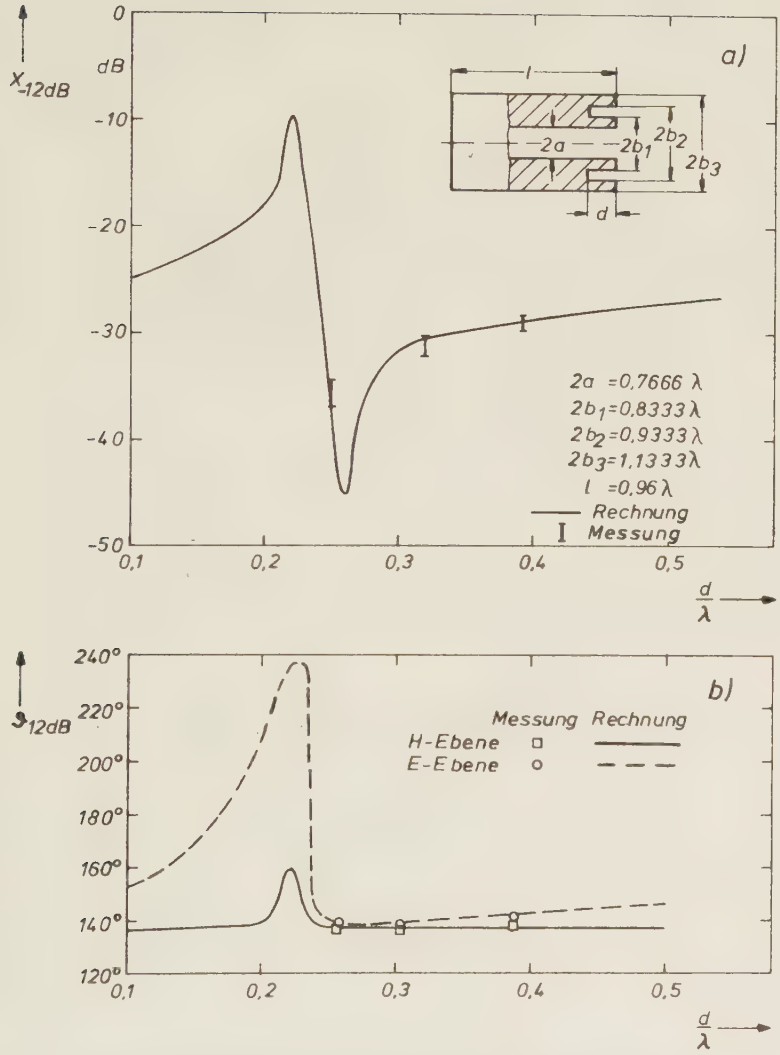


Abb. 4.31 Maximale Kreuzpolarisation (a) und 12 dB-Breiten in E- und H-Ebene (b) eines Rundhohlleitungsstrahlers mit gerieftem Rand in Abhängigkeit von der Riefentiefe.

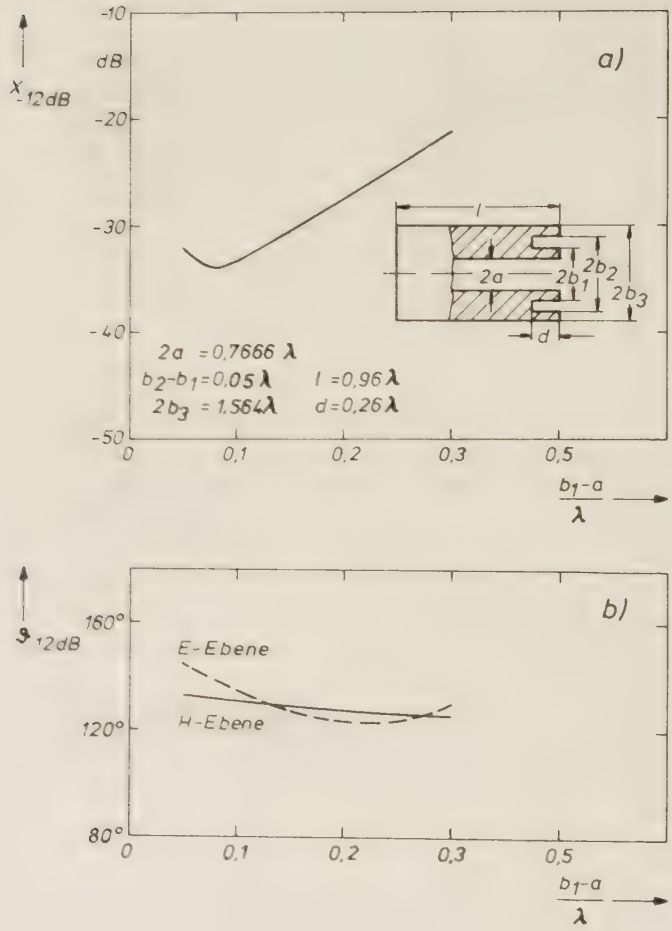


Abb. 4.32 Maximale Kreuzpolarisation (a) und 12 dB-Breiten in E- und H-Ebene (b) eines Rundhohlleitungsstrahlers mit gerieftem Rand in Abhängigkeit vom Abstand zwischen Hohlleitungsöffnung und Riefe bei konstantem [illegible].

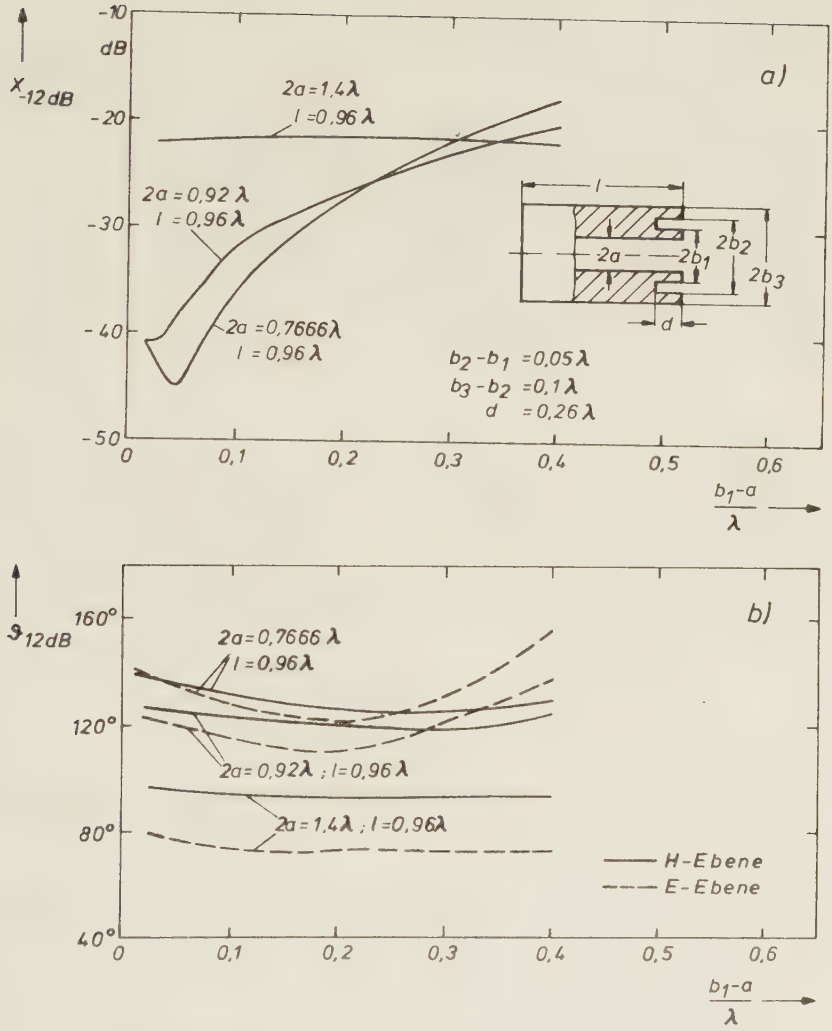


Abb. 4.33 Maximale Kreuzpolarisation (a) und 12 dB-Breiten in E- und H-Ebene (b) eines Rundhohlleitungsstrahlers mit gerieftem Rand in Abhängigkeit vom Abstand zwischen Hohlleitungsöffnung und Riefe bei konstanter Wandstärke jenseits der Riefe.

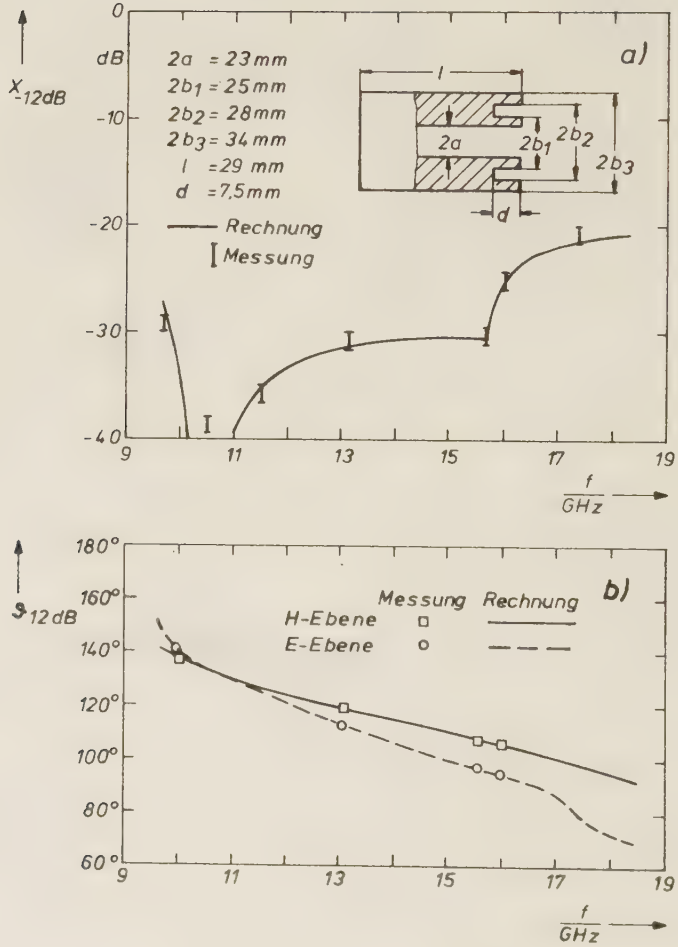


Abb. 4.34 Maximale Kreuzpolarisation (a) und 12 dB-Breiten in E- und H-Ebene (b) eines Rundhohlleitungsstrahlers mit gerieftem Rand als Funktion der Frequenz.

(3) Bei großen Innendurchmessern ($2a/\lambda > 1{,}2$) vermag die Form des Flansches das Strahlungsfeld kaum zu beeinflussen, was in Übereinstimmung mit den Ergebnissen bei glattem Rand steht.

Abb. 4.34 zeigt die Frequenzabhängigkeit der Kreuzpolarisation und der 12 dB-Breiten in E- und H-Ebene für einen speziellen Strahler des obigen Typs. Seine Kreuzpolarisation ist im Frequenzbereich von 10 bis 11,5 GHz kleiner als -35 dB, was einer Bandbreite von ±7,5 % entspricht. Läßt man eine Kreuzpolarisation von -30 dB zu, so ergibt sich eine wesentliche Erweiterung des nutzbaren Frequenzbereiches gegenüber den Strahlern in Abbn. 4.17 und 4.28. Der Anstieg der Kreuzpolarisation in Abb. 4.34 bei 16 GHz ist darauf zurückzuführen, daß die E_{11}-Welle ausbreitungsfähig wird.

Verschiedene Untersuchungen (z. B. [53]) beschäftigen sich mit Hohlleitungsstrahlern, deren Flansch mehrere konzentrische Riefen aufweist. Bei unterschiedlichen Tiefen ist es möglich, Strahler mit kleiner Kreuzpolarisation für mehrere diskrete Frequenzen zu realisieren. Unterschiedliche Riefenbreite erlaubt eine gewisse Diagrammformung. Solange derartige Strukturen in ihren Abmessungen nicht so groß werden, daß die Rechnerkapazität überschritten wird, sind sie mit dem oben beschriebenen Verfahren der Momentenmethode streng behandelbar.

4.7 Der Rundhohlleitungsstrahler mit einem durch zwei Wellentypen bestimmten Aperturfeld

Während bei den bisher beschriebenen Hohlleitungsstrahlern nur die Hauptwelle das Feld in der Öffnung erzeugte, soll nun eine andere Möglichkeit zur Beeinflussung des Aperturfeldes durch einen zweiten nach Amplitude und Phase einstellbaren Wellentyp untersucht werden. Strahler mit mehreren Wellentypen besitzen zu deren Anregung meist experimentell optimierte Elemente [61 - 67]. Hier soll der einfachste Typ eines solchen Hohlleitungsstrahlers, nämlich mit zwei Wellentypen, behandelt werden. Dieser Strahler besteht aus einer Rundhohlleitung deren Querschnitt sich sprunghaft erweitert (Abb. 4.36). Die Sprungstelle habe den Abstand l von der Öffnungsfläche F_2, die wieder im unendlich ausgedehnten Schirm idealer Leitfähigkeit liegen soll. Aus Raum I trifft die H_{11}-Welle auf die Fläche F_1, im Raum II sollen H_{11}- und E_{11}-Welle ausbreitungs-

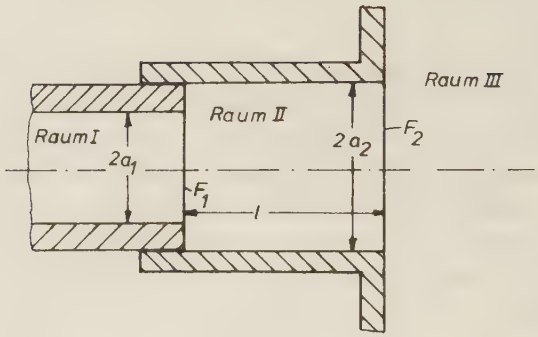


Abb. 4.35 Sprungstelle im Rundhohlleitungsstrahler zur Anregung von H_{11}- und E_{11}-Welle.

fähig sein. Bei geeigneter Wahl der Durchmesser $2a_1$, $2a_2$ und der Länge l ist es möglich, in der Apertur F_2 eine Feldverteilung zu realisieren, die ein kreuzpolarisationsarmes Strahlungsdiagramm erzeugt.

Geht man bei dem Feld in der Öffnung F_2 von der Lösung des Sprungstellenproblems [78] aus und berechnet daraus Strahlungsfeld und Kreuzpolarisation, so vernachlässigt man die Wechselwirkung zwischen Apertur und Sprungstelle. Eine etwas aufwendigere, aber bessere Lösung erhält man über das erste im Abschnitt 3.3.5 beschriebene Drei-Raum-Problem. Setzt man auf den Flächen F_1 und F_2 Basis- und Gewichtsfunktionen analog zu denen aus Gl. (4.7) an, so entsprechen Anregungsvektor und Admittanzmatrizen der Räume I und III den in Abschnitt 4.2 benutzten und im Anhang 6.3.7, 6.3.4 und 6.3.2 beschriebenen. Die Admittanzmatrizen, die für den Raum II gelten, sind im Anhang 6.3.5 näher erläutert.

In Abbn. 4.36 und 4.37 ist die so berechnete maximale Kreuzpolarisation für zwei Öffnungsdurchmesser $2a_2$ in Abhängigkeit von der Länge l/λ mit dem Radienverhältnis a_1/a_2 als Parameter dargestellt [79]. Die Messungen, bei denen l durch Verschieben der Hohlleitung mit dem kleineren Durchmesser variiert wurde, stimmen gut mit den Berechnungen überein. Die geringste Kreuzpolarisation tritt bei relativ kleinen Querschnittssprüngen, d. h. bei ziemlich schwacher Anregung

der E_{11}-Welle, auf. Die optimalen Längen l/λ, die eine phasenmäßig günstige Überlagerung von H_{11}- und E_{11}-Welle in der Apertur bewirken, sind weitgehend unabhängig vom Verhältnis der Durchmesser, aber stark abhängig vom größeren Durchmesser und damit von der Frequenz. Bei ungeeigneter Wahl der Länge l/λ tritt eine höhere Kreuzpolarisation als beim Rundhohlleitungsstrahler mit einem Wellentyp auf. Aufgrund des engen Bereiches von l/λ für günstige Werte der Kreuzpolarisation besitzt der Strahler mit H_{11}- und E_{11}-Anregung nur eine geringe Bandbreite. Definiert man diese als den Frequenzbereich, in dem die maximale Kreuzpolarisation $X_{-12\ dB}$ unter -30 dB bleibt, so ist die Bandbreite beim Radienverhältnis $a_1/a_2 = 5/6$ und dem ersten Optimum der Länge l/λ etwa ±1,75 % für $2a_2 = 1{,}3\lambda$ oder ±3 % für $2a_2 = 1{,}5\lambda$.

Bandbreite und Anpassung eines Hohlleitungsstrahlers mit Querschnittssprung können durch Einfügung eines geeignet geformten Dielektrikums verbessert werden [64]. Strahler mit mehreren Wellentypen können bei genügend einfacher Struktur, z. B. Rundhohlleitungen mit mehreren Querschnittssprüngen, mit Blenden oder mit geeigneten dielektrischen Einsätzen, im allgemeinen nach dem vorstehend beschriebenen Verfahren behandelt werden. Für ihre Dimensionierung ist die systematische Parametervariation mit Hilfe eines Rechners meist zeit- und kostensparend gegenüber empirischer Entwicklung.

4.8 Der Rundhohlleitungsstrahler mit dielektrischem Einsatz

Die Strahlungseigenschaften eines Hohlleitungsstrahlers konnten durch die besondere Gestaltung des Randes der Öffnung beeinflußt werden. Stärker wirkt sich ein in die Öffnung eingefügter dielektrischer Körper aus [80 - 84]. Eine solche Anordnung wird hier als "dielektrischer Strahler" bezeichnet. Dieser zeichnet sich aus durch

- niedrige Fertigungskosten,
- kleine Abmessungen im Vergleich mit einer Hornantenne gleicher 12 dB-Breite,
- geringe gegenseitige Kopplung bei der Verwendung als Element einer Gruppenantenne,
- vielfältige Möglichkeiten der Diagrammgestaltung und
- niedrige Kreuzpolarisation bei entsprechender Dimensionierung.

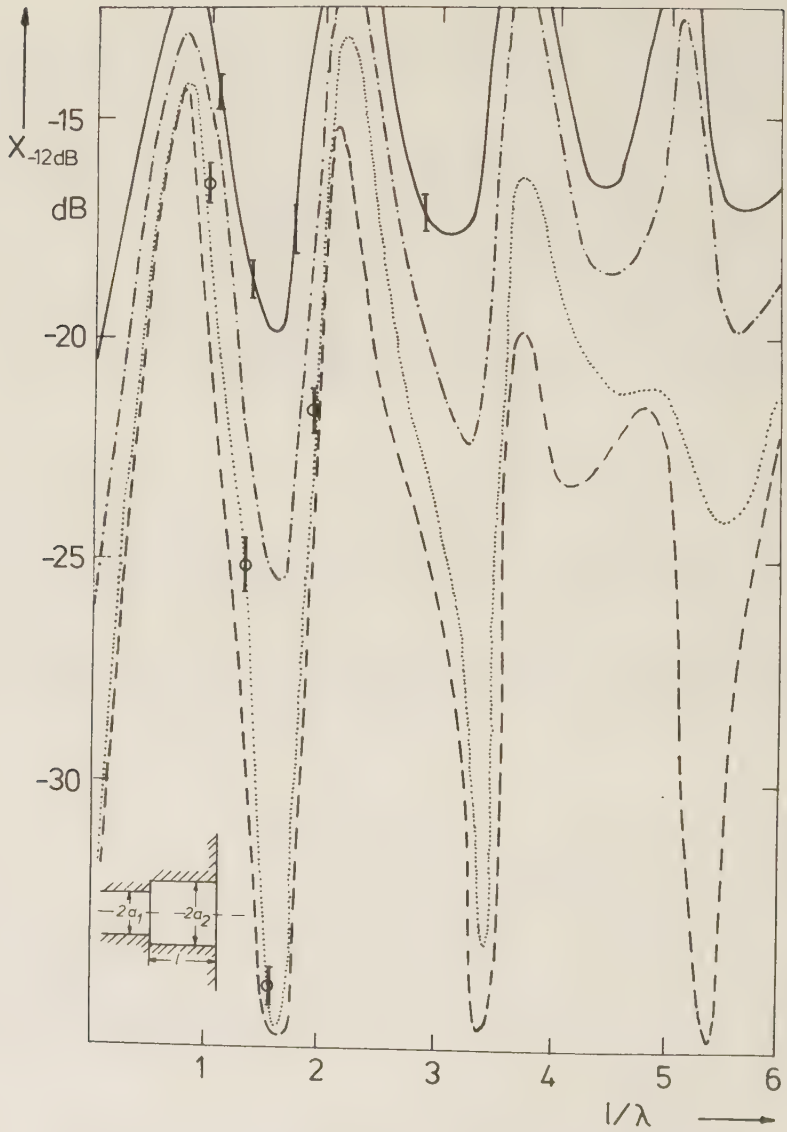


Abb. 4.36 Maximale Kreuzpolarisation eines Rundhohlleitungsstrahlers mit Querschnittssprung in Abhängigkeit von der Länge der Hohlleitung mit dem größeren Durchmesser für $2a_2 = 1{,}3\lambda$.

$a_1/a_2 = 2/3$ $a_1/a_2 = 3/4$ $a_1/a_2 = 5/6$ $a_1/a_2 = 9/10$

Berechnung ——— — · — · — ····· – – – – –

Messung I ϕ

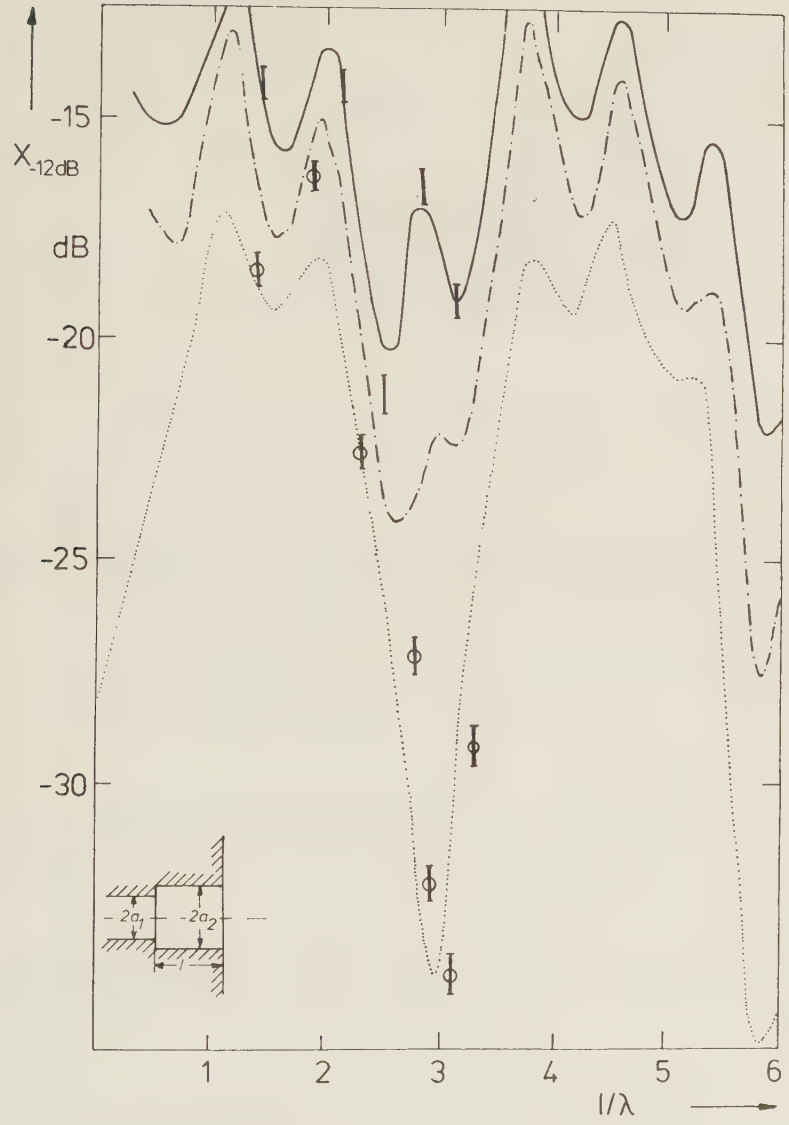


Abb. 4.37 Maximale Kreuzpolarisation eines Rundhohlleitungsstrahlers mit Querschnittssprung in Abhängigkeit von der Länge der Hohlleitung mit dem größeren Durchmesser für $2a_2 = 1{,}5\lambda$.
$a_1/a_2 = 2/3$ $a_1/a_2 = 3/4$ $a_1/a_2 = 5/6$

Berechnung ——— — · — · — ·····

Messung I Φ

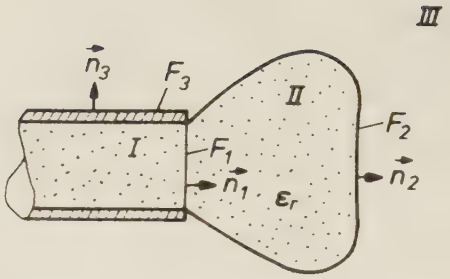


Abb. 4.38 Dielektrischer Strahler

Im Rahmen dieser Arbeit soll nur der letzte Punkt genauer untersucht werden.

Das Strahlungsfeld eines dielektrischen Strahlers läßt sich näherungsweise durch zweimalige Anwendung des Kirchhoff-Huygensschen-Prinzips berechnen [82]:

(1) Es wird angenommen, daß die strahlende Hohlleitung in einem unendlich ausgedehnten Medium der Dielektrizitätszahl ε_r liegt. Nach den Verfahren ER, HR oder EHR werden für diesen homogenen Raum die elektrische und magnetische Feldstärken $\vec{E}_{F2}$ und $\vec{H}_{F2}$ an dem Ort berechnet, an dem sich beim dielektrischen Strahler die Fläche F_2 befindet.

(2) Hieraus werden äquivalente Flächenstromdichten $\vec{J}_2 = \vec{n}_2' \times \vec{H}_{F2}$ und $\vec{M}_2 = -\vec{n}_2' \times \vec{E}_{F2}$ bestimmt. Mit diesen Quellen wird nach Gl. (2.8) das Fernfeld des dielektrischen Strahlers im freien Raum berechnet.

Mit diesem zweistufigen Näherungsverfahren erhält man bei nicht zu komplizierten Strukturen brauchbare Ergebnisse für die Hauptpolarisation [85]. Die Aussagen über die Kreuzpolarisation weichen jedoch teilweise erheblich von Messungen ab.

Hier wird der dielektrische Strahler entsprechend dem zweiten in Abschnitt 3.3.5 beschriebenen Drei-Raum-Problem behandelt. Damit wird die beim Näherungsverfahren vernachlässigte Reflexion und Beugung an der Oberfläche F_2 des Dielektrikums in die Berechnung einbezogen, und auch die Fehlanpassung, die bei solchen Strahlern eine nicht unwesentliche Rolle spielt, läßt sich angeben. Allerdings ist eine numerische Auswertung von Drei-Raum-Problemen selbst auf einem Großrechner

nur bei kleinen rotationssymmetrischen Strukturen möglich, da Speicherplatz und Rechenzeitbedarf mit wachsender Oberfläche des dielektrischen Einsatzes sehr schnell ansteigen. Hier soll daher auch nur die Momentenlösung für rotationssymmetrische Strahler dargestellt werden. Basis- und Gewichtsfunktionen werden auf der Fläche F_1 für $\vec{M}_1$ nach Gl. (4.7), auf F_2 für $\vec{M}_2$ nach Gl. (4.21) und für $\vec{J}_2$ nach Gl. (4.22) sowie auf F_3 für $\vec{J}_3$ nach Gl. (4.22) angesetzt. Aus der Rundhohlleitung trifft wieder eine H_{11}-Welle auf die Fläche F_1, alle Flächenströme und Feldkomponenten besitzen dann eine φ-Abhängigkeit wie $\cos\varphi$ oder $\sin\varphi$. Die in diesem Fall für die Berechnung notwendigen Admittanzmatrizen und der Anregungsvektor sind im Anhang 6.3 zusammengestellt.

Ein sehr einfacher Einsatz für einen dielektrischen Strahler ist die Kugel. In Abb. 4.39 sind die Fernfelddiagramme für einen Strahler mit einer Kugel aus Polyäthylen wiedergegeben. Die Länge der Hohlleitung wurde bei der Momentenlösung mit $l = 0{,}4\lambda$ angesetzt. Während der Verlauf der Hauptpolarisation erwartungsgemäß auch von den Näherungsverfahren recht gut wiedergegeben wird, treten bei der Kreuzpolarisation große Abweichungen auf. Das Fernfeld dieses dielektrischen Strahlers weist eine gute Rotationssymmetrie und geringe Kreuzpolarisation auf. Daß bei den Messungen eine kleine Kreuzpolarisationskomponente auch in Hauptstrahlrichtung auftritt, ist vor allem auf Fertigungsfehler des dielektrischen Einsatzes zurückzuführen.

Abb. 4.40 zeigt die Frequenzabhängigkeit der maximalen Kreuzpolarisation eines dielektrischen Strahlers mit kegelförmigem Einsatz. Dieser Strahler zeichnet sich durch gute Rotationssymmetrie des Fernfelddiagrammes im untersuchten Frequenzbereich und sehr geringe Kreuzpolarisation bei Frequenzen um 8,7 GHz aus.

Bei der Dimensionierung dielektrischer Strahler stehen als vorgebbare Größen die Abmessungen und die Dielektrizitätszahl zur Verfügung. Die Zahl der denkbaren Strukturen ist dabei nahezu unerschöpflich. Für die Optimierung solcher Strahler sind daher zuverlässige Berechnungen, wie sie mit Hilfe des Integralgleichungsverfahrens für das Drei-Raum-Problem durchgeführt werden können, kosten- und zeitsparend gegenüber empirischen Entwicklungen.

Dielektrische Strahler können bei geeigneter Form auch kreuzpolarisationsarme asymmetrische Diagramme, z. B. mit elliptischem Querschnitt erzeugen [84]. In Abb. 4.41 ist ein Strahler dargestellt, dessen einfach herzustellender dielektrischer Einsatz aus einem Kugelsektor besteht. Dessen unterschiedliche

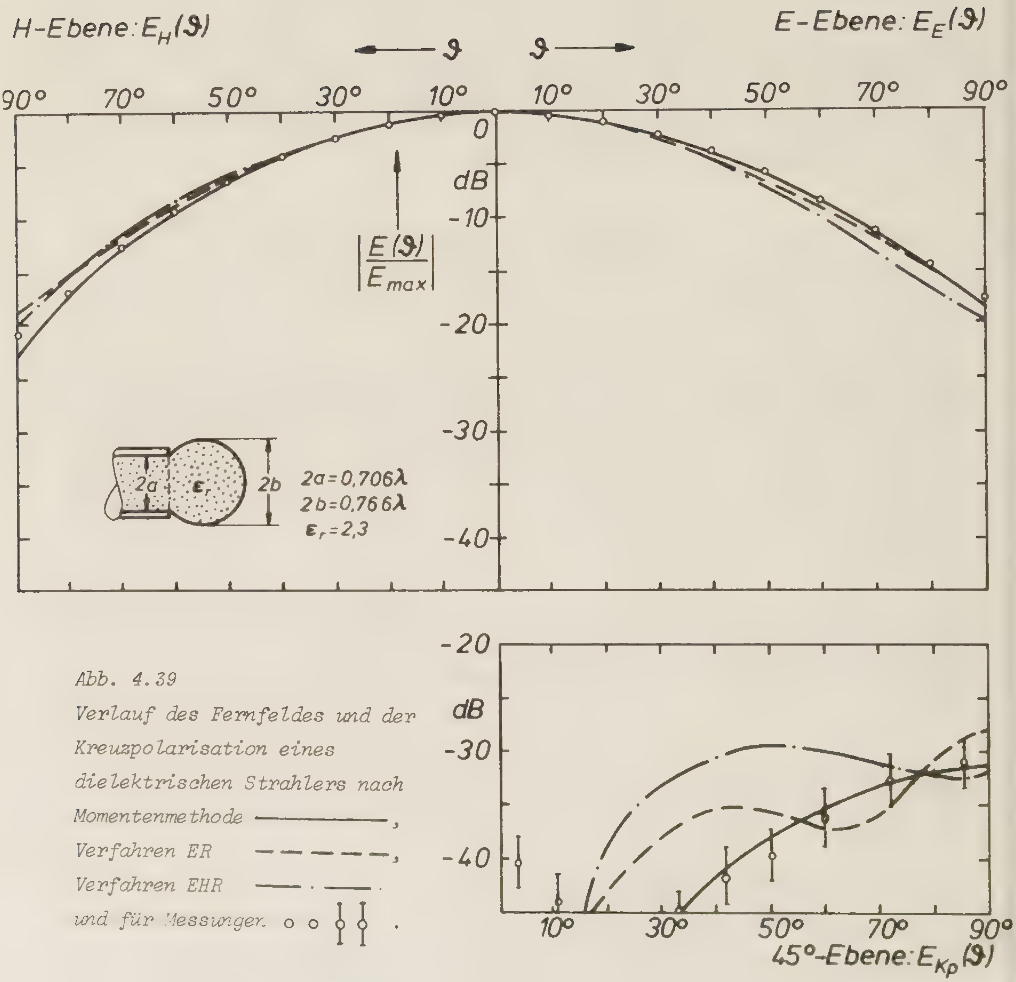


Abb. 4.39
Verlauf des Fernfeldes und der Kreuzpolarisation eines dielektrischen Strahlers nach Momentenmethode ————,
Verfahren ER — — — —,
Verfahren EHR —— · ——.
und für Messungen ο ο ⫯ ⫯ .

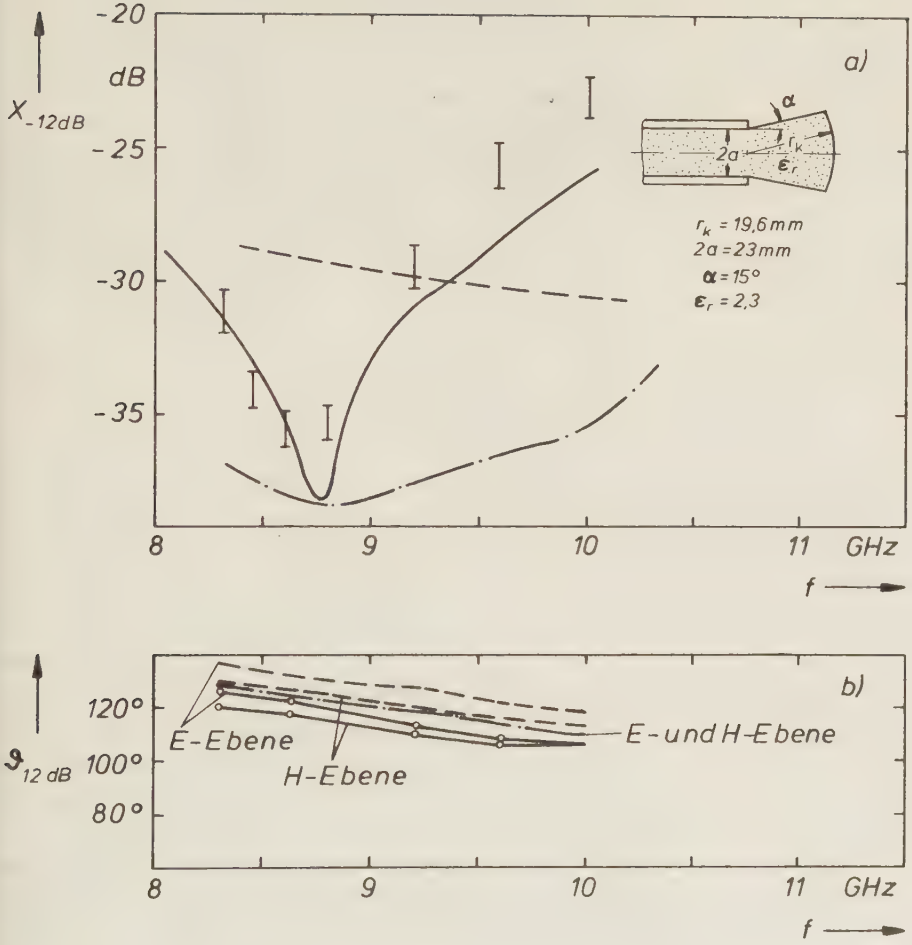


Abb. 4.40 Maximale Kreuzpolarisation (a) und 12 dB-Breiten in E- und H-Ebene (b) eines dielektrischen Strahlers als Funktion der Frequenz nach Momentenlösung ————, Verfahren ER — — — —, Verfahren EHR ——·——·— und für Messungen I ○ .

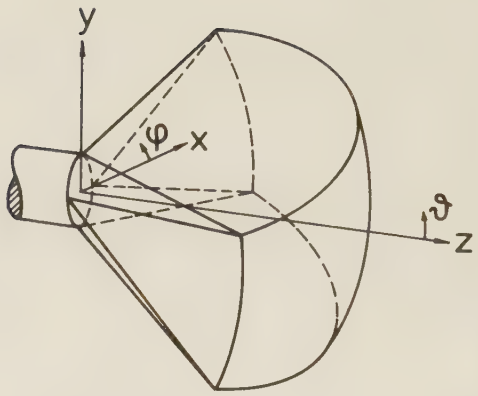
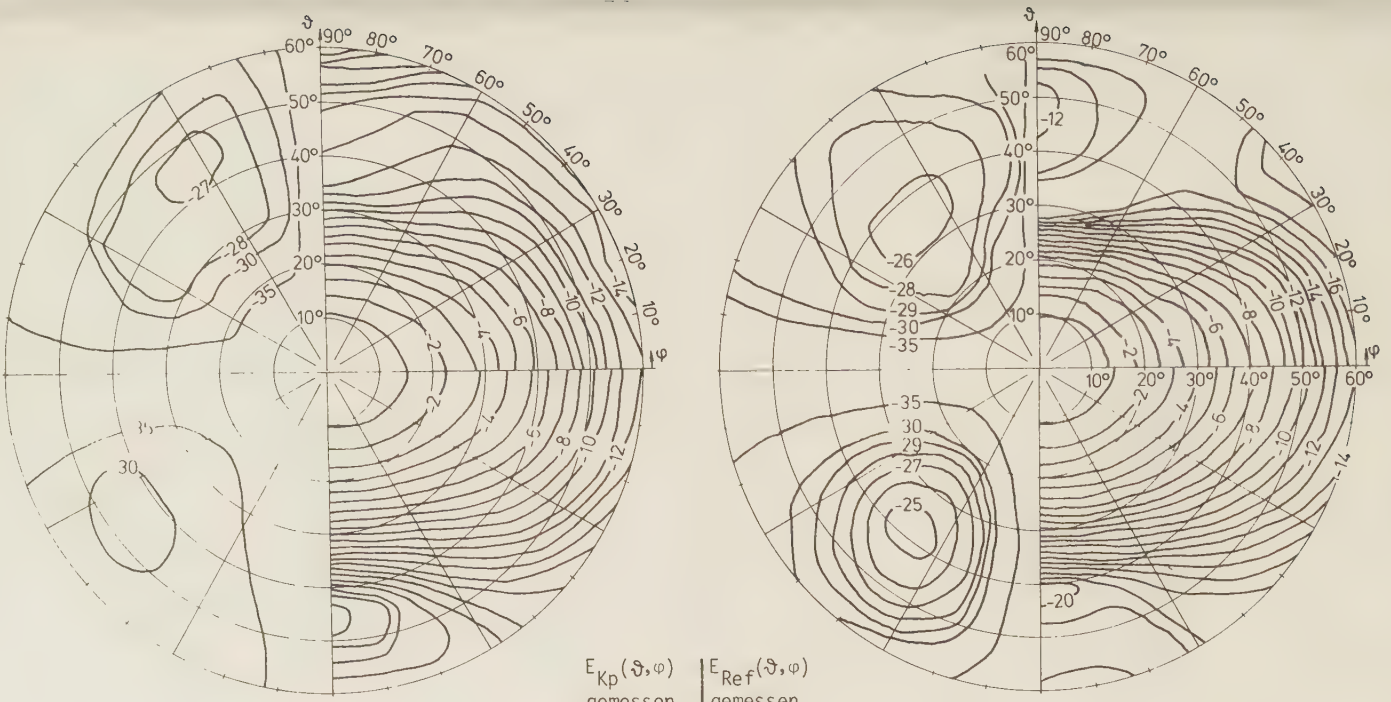


Abb. 4.41 Dielektrischer Strahler für ein Fernfeld-diagramm elliptischen Querschnitts.

Öffnungswinkel bewirken verschiedene Breiten der Strahlungscharakteristik in E- und H-Ebene. Die maximale Kreuzpolarisation tritt nun allerdings nicht mehr in der Ebene $\varphi = 45^{o}$ auf. Abb. 4.42 zeigt den gemessenen und mit Hilfe des Näherungsverfahrens EHR berechneten Verlauf der elektrischen Feldstärke im Fernfeld und die Kreuzpolarisation für x- und y-Polarisation des Strahlers. Man erkennt deutlich den elliptischen Querschnitt der Diagramme. Die Fernfeldcharakteristiken beider linearer Erregerpolarisationen stimmen bis etwa zur 12 dB-Breite erstaunlich gut überein, und die Kreuzpolarisation ist stets kleiner als -25 dB, so daß dieser Strahler nach den Überlegungen in Abschnitt 2.3 auch zur kreuzpolarisationsarmen Anwendung zirkularer Polarisation geeignet ist. Die Frequenzabhängigkeit der maximalen Kreuzpolarisation und die 12 dB-Breiten für x- und y-Polarisation sind in Abb. 4.43 wiedergegeben. Durch Optimierung der Abmessungen und der Dielektrizitätszahl sind die Kreuzpolarisationseigenschaften eines derartigen Strahlers wahrscheinlich noch verbesserungsfähig.



$E_{Kp}(\vartheta,\varphi)$ gemessen	$E_{Ref}(\vartheta,\varphi)$ gemessen
$E_{Kp}(\vartheta,\varphi)$ berechnet	$E_{Ref}(\vartheta,\varphi)$ berechnet

y-Polarisation

x-Polarisation

Abb. 4.42 Betrag von Referenz- und Kreuzpolarisation im Fernfeld eines dielektrischen Strahlers nach Abb. 4.41 für x- und y-Polarisation der anregenden Welle. Frequenz: 9,2 GHz, Öffnungswinkel des dielektrischen Einsatzes in der xz-Ebene: 120°, in der yz-Ebene: 26°, ε_r = 1,5, Gesamtlänge: 56 mm, Kugelradius: 36 mm, Hohlleitungsinnendurchmesser: 23 mm.

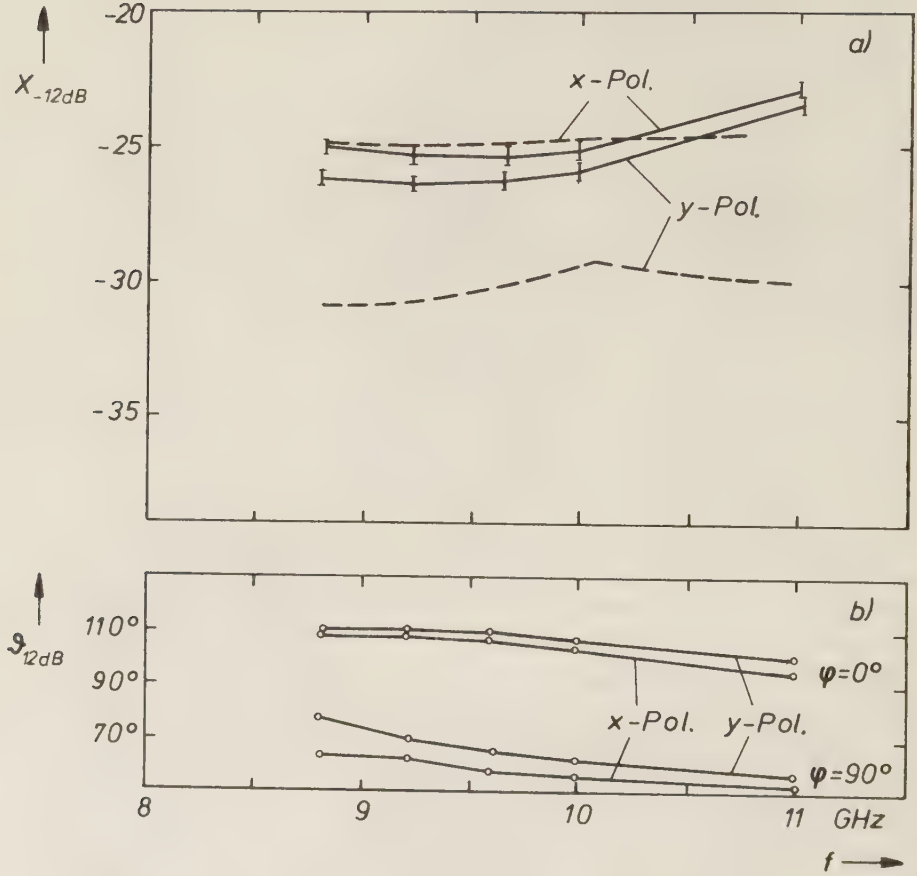


Abb. 4.43 Maximale Kreuzpolarisation (a) und 12 dB-Breiten in E- und H-Ebene (b) eines dielektrischen Strahlers nach Abb. 4.41 als Funktion der Frequenz. Öffnungswinkel des dielektrischen Einsatzes in der xz-Ebene: 120°, in der yz-Ebene: 26°, $\varepsilon_r = 1{,}5$, Gesamtlänge: 56 mm, Kugelradius: 36 mm, Hohlleitungsinnendurchmesser: 23 mm.

Messungen,

Berechnungen nach dem Verfahren EHR.

5. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurden allgemeine Kriterien für das Kreuzpolarisationsverhalten von strahlenden Aperturen entwickelt und auf spezielle Beispiele von Hohlleitungsstrahlern angewandt. Da bei der Berechnung der Kreuzpolarisation bereits kleine Fehler im Aperturfeld erhebliche Auswirkungen haben können, wurde im Zuge eines strengen Berechnungsverfahrens von einer Integralgleichung ausgegangen, die mit Hilfe der Momentenmethode gelöst werden konnte. Die Ergebnisse wurden mit Messungen und mit Kirchhoffschen Näherungen verglichen. Untersucht wurde u. a. die Abstrahlung von Rundhohlleitungen mit endlicher Wandstärke, mit speziell geformtem Rand, mit Durchmessersprung und mit dielektrischem Einsatz.

Die strenge Rechnung beschränkte sich bewußt auf geometrisch einfache, aber grundlegende Strahlerformen, um mit Hilfe des Rechenprogramms die Optimierung der Abmessungen für minimale Kreuzpolarisation zu ermöglichen. Dabei zeigte sich, daß das elektrische Aperturfeld bei Hohlleitungsstrahlern mit kleinen Öffnungen sowohl eine x- als auch eine y-Komponente besitzt. Die Arbeit enthält Diagramme, die Dimensionierungshilfen für die einzelnen Strahlertypen liefern. Auf die Untersuchung der für kreuzpolarisationarme Strahlung sehr geeigneten, aber wesentlich aufwendigeren gerieften Hohlleitung wurde verzichtet, da darüber eine sehr umfangreiche Literatur vorliegt. Im Bedarfsfall kann auch dieser Strahler als Zwei-Raum-Problem nach dem gleichen Prinzip wie die anderen Hohlleitungsstrahler streng behandelt werden. Die entwickelten Rechnerprogramme sind für eine Vielzahl ähnlicher Strahlerstrukturen einsetzbar und erlauben gegenüber empirischen Entwicklungen einen kostengünstigen und zeitsparenden Entwurf von Hohlleitungsstrahlern im Hinblick auf kreuzpolarisationsarme Anwendungen.

Als vielseitig einsetzbarer, kostengünstiger kreuzpolarisationsarmer Strahler erwies sich vor allem der dielektrische Strahler. Er kann bei geeigneter Dimensionierung auch zur Erzeugung asymmetrischer zirkular polarisierter Diagramme eingesetzt werden.

6. Anhang

6.1 Berechnung des Fernfeldes von Öffnungen in ebenen ideal leitenden Schirmen und von Hohlleitungsstrahlern mit Hilfe der Kirchhoffschen Näherungsverfahren 111

6.2 Berechnung der singulären Integrale der S-Matrizen 114

6.3 Berechnung der Matrizen für die Behandlung rotationssymmetrischer Strukturen mit Hilfe der Momentenmethode 116

6.3.1 Ansätze für Basis- und Gewichtsfunktionen 116

6.3.2 T-Matrizen 117

6.3.3 S-Matrizen 121

6.3.4 Admittanzmatrix einer Rundhohlleitung 124

6.3.5 Admittanzmatrix eines Rundhohlleitungsstückes endlicher Länge 125

6.3.6 D-Matrizen 127

6.3.7 Anregungsvektoren 128

6.4 Berechnung der Matrizen für die Behandlung der Rechteckhohlleitung und der rechteckigen Öffnung mit Hilfe der Momentenmethode 129

6.4.1 Admittanzmatrix des Halbraumes 129

6.4.2 Admittanzmatrix einer Rechteckhohlleitung 130

6.4.3 Anregungsvektoren 130

6.1 Berechnung des Fernfeldes von Öffnungen in ebenen ideal leitenden Schirmen und von Hohlleitungsstrahlern mit Hilfe der Kirchhoffschen Näherungsverfahren

Im Abschnitt 3.2 wurden die Kirchhoffschen Näherungsverfahren erläutert. Im folgenden wird die Winkelabhängigkeit der Fernfeldcharakteristik, wie sie in Gln. (3.13-15) und (4.3-5) auftritt, für die kreis- und rechteckförmige Öffnung im unendlich ausgedehnten ebenen Schirm sowie für die Strahlung aus Rund- und Rechteckhohlleitung berechnet. Aus Gl. (2.8) und Gln. (3.13a,b) oder Gln. (4.5) folgen:

$$f_\vartheta(\vartheta,\varphi) = \frac{k^2}{E_0}\,\vec{u}_\vartheta \cdot \vec{u}_r \times \vec{\Pi}_{mo}(\vartheta,\varphi),$$

$$f_\varphi(\vartheta,\varphi) = \frac{k^2}{E_0}\,\vec{u}_\varphi \cdot \vec{u}_r \times \vec{\Pi}_{mo}(\vartheta,\varphi)\,\frac{1}{\cos\vartheta}.$$

Wenn die Öffnung in der Ebene z = 0 liegt, hat $\vec{\Pi}_{mo}$ nur x- und y-Komponenten, so daß

$$f_\vartheta(\vartheta,\varphi) = \frac{k^2}{E_0}\left[\Pi_{mox}(\vartheta,\varphi)\,\sin\varphi - \Pi_{moy}(\vartheta,\varphi)\,\cos\varphi\right], \tag{6.1}$$

$$f_\varphi(\vartheta,\varphi) = \frac{k^2}{E_0}\left[\Pi_{mox}(\vartheta,\varphi)\,\cos\varphi + \Pi_{moy}(\vartheta,\varphi)\,\sin\varphi\right] \tag{6.2}$$

gilt. Dabei ist nach Gl. (2.8)

$$\vec{\Pi}_{mo}(\vartheta,\varphi) = \frac{k^2}{E_0}\iint_{F_0}[-\vec{u}_z \times \vec{E}_{tan}(x',y')]\; e^{jkR}\,df',$$

oder

$$\Pi_{mox}(\vartheta,\varphi) = \frac{k^2}{E_0}\iint_{F_0}\vec{u}_y \cdot \vec{E}_{tan}(x',y')\; e^{jkR}\,df',$$

$$\Pi_{moy}(\vartheta,\varphi) = \frac{k^2}{E_0}\iint_{F_0}\vec{u}_x \cdot \vec{E}_{tan}(x',y')\; e^{jkR}\,df', \tag{6.3}$$

mit

$$R = x'\sin\vartheta\cos\varphi + y'\sin\vartheta\sin\varphi.$$

a) Kreisförmige Öffnung im ebenen Schirm

Für eine senkrecht auf den Schirm treffende ebene Welle erhält man mit

$$\vec{E}^{e}_{tan} = \vec{u}_y E_o$$

für eine kreisförmige Öffnung vom Radius a nach Berechnung der Integrale (6,3) und Einsetzen in Gln. (6.1,2)

$$\begin{aligned} f_\vartheta(\vartheta,\varphi) &= \frac{2\pi ka}{\sin\vartheta} J_1(ka\sin\vartheta)\sin\varphi, \\ f_\varphi(\vartheta,\varphi) &= \frac{2\pi ka}{\sin\vartheta} J_1(ka\sin\vartheta)\cos\varphi. \end{aligned} \tag{6.4}$$

b) Rechteckige Öffnung im ebenen Schirm

Trifft die ebene Welle senkrecht auf eine rechteckige Öffnung mit den Kantenlängen 2a und 2b, so findet man für

$$\begin{aligned} f_\vartheta(\vartheta,\varphi) &= \frac{4}{\sin^2\vartheta\cos\varphi}\sin(ka\sin\vartheta\cos\varphi)\sin(kb\sin\vartheta\sin\varphi), \\ f_\varphi(\vartheta,\varphi) &= \frac{4}{\sin^2\vartheta\sin\varphi}\sin(ka\sin\vartheta\cos\varphi)\sin(kb\sin\vartheta\sin\varphi). \end{aligned} \tag{6.5}$$

c) Hohlleitung mit kreisförmigem Querschnitt

Mit Gln. (4.10a,b) kann man für die transversale elektrische Feldstärke in der Öffnung einer Rundhohlleitung vom Radius a bei den H-Wellen

$$\vec{E}^{H}_{mi}(\rho',\varphi') = E_o B^{H}_{mi}\frac{1}{k}\left[\vec{u}_\rho \frac{m}{\rho'} J_m(k^{H}_{\rho i}\rho')\sin(m\varphi') + \vec{u}_\varphi k^{H}_{\rho i} J'_m(k^{H}_{\rho i}\rho')\cos(m\varphi')\right],$$

bei den E-Wellen

$$\vec{E}^{E}_{mi}(\rho',\varphi') = E_o B^{E}_{mi}\frac{1}{k}\left[\vec{u}_\rho k^{E}_{\rho i} J'_m(k^{E}_{\rho i}\rho')\sin(m\varphi') + \vec{u}_\varphi \frac{m}{\rho'} J_m(k^{E}_{\rho i}\rho')\cos(m\varphi')\right]$$

schreiben. Berechnet man hiermit die Integrale (6.3) und setzt die Ergebnisse in

Gln. (3.1,2) ein, so erhält man für die H-Wellen [86]:

$$f_\vartheta(\vartheta,\varphi) = 2\pi j^{m-1} B^H_{mi} \frac{m}{\sin\vartheta} J_m(k^H_{\rho i} a)\, J_m(ka\sin\vartheta)\sin(m\varphi),$$
$$f_\varphi(\vartheta,\varphi) = 2\pi j^{m-1} B^H_{mi} \frac{k\,a}{1-(\frac{k\sin\vartheta}{k^H_{\rho i}})^2} J_m(k^H_{\rho i} a)\, J'_m(ka\sin\vartheta)\cos(m\varphi), \qquad (6.6)$$

für die E-Wellen:

$$f_\vartheta(\vartheta,\varphi) = 2\pi j^{m-1} B^E_{mi} \frac{k^E_{\rho i}\,a}{1-(\frac{k^E_{\rho i}}{k\sin\vartheta})^2} J'_m(k^E_{\rho i} a)\, J_m(ka\sin\vartheta)\sin(m\varphi), \qquad (6.7)$$

$$f_\varphi(\vartheta,\varphi) = 0.$$

d) Hohlleitung mit rechteckigem Querschnitt

Mit Gln. (4.18a,b) kann man für die transversale elektrische Feldstärke in der Öffnung einer Rechteckhohlleitung mit den Kantenlängen 2a und 2b bei den H-Wellen

$$\vec{E}^H_{mn}(x',y') = E_0 B_{mn} \frac{1}{k}\left\{\vec{u}_x \frac{n}{2b}\cos[\frac{m\pi}{2a}(x'+a)]\sin[\frac{n\pi}{2b}(y'+b)] - \vec{u}_y \frac{m}{2a}\sin[\frac{m\pi}{2a}(x'+a)]\cos[\frac{n\pi}{2b}(y'+b)]\right\},$$

bei den E-Wellen

$$\vec{E}^E_{mn}(x',y') = E_0 B_{mn} \frac{1}{k}\left\{\vec{u}_x \frac{m}{2a}\cos[\frac{m\pi}{2a}(x'+a)]\sin[\frac{n\pi}{2b}(y'+b)] + \vec{u}_y \frac{n}{2b}\sin[\frac{m\pi}{2a}(x'+a)]\cos[\frac{n\pi}{2b}(y'+b)]\right\}$$

schreiben. Berechnet man wiederum die Integrale (6.3) und setzt die Ergebnisse in Gln. (6.1,2) ein, so erhält man für die H-Wellen:

$$f_\vartheta(\vartheta,\varphi) = -[(\frac{m}{2a}\sin\varphi)^2 - (\frac{n}{2b}\cos\varphi)^2]\, g_{mn}(\vartheta,\varphi),$$
$$f_\varphi(\vartheta,\varphi) = -[(\frac{m}{2a})^2 + (\frac{n}{2b})^2]\, \sin\varphi\cos\varphi\, g_{mn}(\vartheta,\varphi) \qquad (6.8)$$

und für die E-Wellen:

$$f_\vartheta(\vartheta,\varphi) = \frac{m\,n}{4ab}\, g_{mn}(\vartheta,\varphi),$$
$$f_\varphi(\vartheta,\varphi) = 0, \qquad (6.9)$$

mit

$$g_{mn}(\vartheta,\varphi) = 4\pi\, k^2(2a)^2(2b)^2\sin\vartheta\, e^{j(m+n+1)\pi/2} \cdot \frac{\sin(ka\sin\vartheta\cos\varphi + m\pi/2)}{[(ka\sin\vartheta\cos\varphi)^2 - (m\pi/2)^2]} \cdot \frac{\sin(kb\sin\vartheta\sin\varphi + n\pi/2)}{[(kb\sin\vartheta\sin\varphi)^2 - (n\pi/2)^2]} .$$

6.2 Berechnung der singulären Integrale der S-Matrizen

Die Berechnung der S-Matrizen soll anhand Gl. (3.34a) näher erläutert werden. Das elektrische Feld, das von einer magnetischen Flächenstromdichte $\vec{M}(\vec{r}')$ erzeugt wird, berechnet sich aus dem ersten Glied von Gl. (3.5a) zu

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\mathrm{rot}\iint_F \vec{M}(\vec{r}')\, G_0(\vec{r},\vec{r}')\, df'.$$

Liegt der Aufpunkt auf der Integrationsfläche F, dann wird die Greensche Funktion singulär, und man muß eine Grenzwertbetrachtung für den gesamten Ausdruck durchführen [87]. Dazu legt man den Aufpunkt etwas über die Integrationsfläche (Abstand $\delta = |\vec{\delta}|$) und betrachtet den Grenzwert für $\delta \to 0$. Hierzu spaltet man zunächst auf in

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\mathrm{rot}\iint_{F-\Delta F} \vec{M}(\vec{r}')\, G_0(\vec{r},\vec{r}')\, df' - \lim_{\delta\to 0} \mathrm{rot}\iint_{\Delta F} \vec{M}(\vec{r}')\, G_0(\vec{r}+\vec{\delta},\vec{r}')\, df'. \qquad (6.10)$$

ΔF ist eine kleine kreisförmige Fläche, die die Singularität umschließt. "Klein" bedeutet, daß ΔF eben und $\vec{M}(\vec{r}')$ auf ΔF als konstant angenommen werden kann. Für

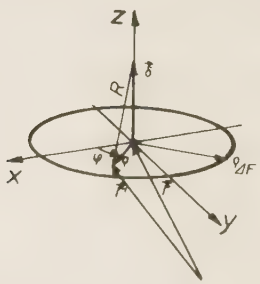


Abb. 6.1 Koordinatensystem für die Berechnung des Integrals der S-Matrizen.

die Berechnung des Integrals über ΔF ist es zweckmäßig, ein Zylinderkoordinatensystem (ρ ,φ ,z) mit ΔF als Grundfläche z = 0 einzuführen. Für $\delta > 0$ kann der Differentialoperator rot unter das Integralzeichen gezogen werden, man erhält dann für den zweiten Integralausdruck in Gl. (6.10):

$$- \lim_{\delta \to 0} \operatorname{rot} \iint_{\Delta F} \vec{M}(\vec{r}') \, G_0(\vec{r}+\vec{\delta},\vec{r}') \, df'$$

$$= \frac{1}{4\pi} \lim_{\delta \to 0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_{\Delta F}} \frac{1+jkR}{R^3} e^{-jkR} \left(-\vec{u}_x \rho' \cos\varphi' - \vec{u}_y \rho' \sin\varphi' + \vec{u}_z \delta\right) \times \vec{M}(\vec{r}') \rho' \, d\rho' \, d\varphi'$$

$$= \vec{E}_{\Delta F},$$

mit

$$R = \sqrt{\rho'^2 + \delta^2}.$$

Die Integrationen über φ' und ρ' liefern:

$$\vec{E}_{\Delta F} = \frac{1}{2} \vec{u}_z \times \vec{M}(\vec{r}) \lim_{\delta \to 0} \delta \int_0^{\rho_{\Delta F}} \frac{1+jkR}{R^3} e^{-jkR} \, \rho' \, d\rho'$$

$$= -\frac{1}{2} \vec{u}_z \times \vec{M}(\vec{r}) \lim_{\delta \to 0} \delta \left[\frac{e^{-jk\sqrt{\rho_{\Delta F}^2 + \delta^2}}}{\sqrt{\rho_{\Delta F}^2 + \delta^2}} - \frac{e^{-jk\delta}}{\delta} \right] = \frac{1}{2} \vec{u}_z \times \vec{M}(\vec{r}).$$

Ersetzt man noch $\vec{u}_z$ durch den Normaleneinheitsvektor $\vec{n}$ der Fläche ΔF, so erhält man schließlich insgesamt für Gl. (6.10):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{n} \times \vec{M}(\vec{r}) - \iint_F \operatorname{rot} \left[\vec{M}(\vec{r}') \, G_0(\vec{r},\vec{r}')\right] df',$$

wobei das Integral im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes zu berechnen ist.
Gl. (3.34a) kann man damit in der Form

$$\mathbf{S}^M = \left[<\vec{U}_q(\vec{r}), \frac{1}{2} \vec{n} \times \vec{M}_p(\vec{r}) - \iint_{F_A} \operatorname{rot} \left[\vec{M}_p(\vec{r}') \, G_0(\vec{r},\vec{r}')\right] df'>\right] \qquad (6.11)$$

schreiben. Für die anderen S-Matrizen findet man entsprechende Ausdrücke.

6.3 Berechnung der Matrizen für die Behandlung rotationssymmetrischer Strukturen mit Hilfe der Momentenmethode

6.3.1 Ansätze für Basis- und Gewichtsfunktionen

Zur Beschreibung der Oberfläche eines rotationssymmetrischen Körpers wird das Koordinatensystem (t,φ) benutzt: φ ist die übliche Zylinderkoordinate, t bezeichnet Koordinatenlinien,die tangential zur Oberfläche und senkrecht zu den φ-Linien verlaufen. Der Nullpunkt liegt auf der z-Achse (Abb. 6.2). Mit dem Einheitsvektor in t-Richtung und dem Normaleneinheitsvektor gilt die Beziehung

$$\vec{n} = \vec{u}_t \times \vec{u}_\varphi .$$

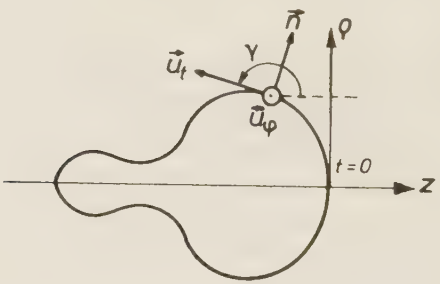


Abb. 6.2 Koordinatensystem zur Beschreibung der Oberfläche eines rotationssymmetrischen Körpers.

Im rotationssymmetrischen Fall werden bei Anwendung der Methode von Galerkin als Basisfunktionen

$$\begin{aligned}
\vec{M}^{t}_{m'n'}(t',\varphi') &= \vec{u}'_t \frac{1}{\rho'} D(t' - t_{n'}) \cos(m'\varphi'), \\
\vec{M}^{\varphi}_{m'n'}(t',\varphi') &= -\vec{u}'_\varphi \frac{1}{\rho'} D(t' - t_{n'}) \sin(m'\varphi'),
\end{aligned} \tag{6.12a}$$

$$\begin{aligned}
\vec{J}^{t}_{m'n'}(t',\varphi') &= \vec{u}'_t \frac{1}{\rho'} D(t' - t_{n'}) \sin(m'\varphi'), \\
\vec{J}^{\varphi}_{m'n'}(t',\varphi') &= u'_\varphi \frac{1}{\rho'} D(t' - t_{n'}) \cos(m'\varphi')
\end{aligned} \tag{6.12b}$$

und als Gewichtsfunktionen

$$\vec{W}^{t}_{mn}(t,\varphi) = \vec{u}_t \frac{1}{\rho} D(t - t_n) \cos(m\varphi),$$
$$\vec{W}^{\varphi}_{mn}(t,\varphi) = -\vec{u}_\varphi \frac{1}{\rho} D(t - t_n) \sin(m\varphi), \qquad (6.13a)$$

$$\vec{U}^{t}_{mn}(t,\varphi) = \vec{u}_t \frac{1}{\rho} D(t - t_n) \sin(m\varphi),$$
$$\vec{U}^{\varphi}_{mn}(t,\varphi) = \vec{u}_\varphi \frac{1}{\rho} D(t - t_n) \cos(m\varphi) \qquad (6.13b)$$

gewählt. Dabei gelten die Zusammenhänge

$$\vec{M}^{t}_{m'n'} = -\vec{n}' \times \vec{J}^{\varphi}_{m'n'},$$
$$\vec{M}^{\varphi}_{m'n'} = -\vec{n}' \times \vec{J}^{t}_{m'n'}, \qquad (6.14a)$$

$$\vec{W}^{t}_{mn} = -\vec{n} \times \vec{U}^{\varphi}_{mn},$$
$$\vec{W}^{\varphi}_{mn} = -\vec{n} \times \vec{U}^{t}_{mn}. \qquad (6.14b)$$

Mit Hilfe der Ansätze Gln. (6.12,13) ist es zunächst nur möglich, Quellenverteilungen entsprechend Gl. (2.18) zu beschreiben, durch geeignete Wahl des Koordinatensystems kann man jedoch auch allgemeine Verteilungen behandeln.

6.3.2 T-Matrizen

Die in Abschnitt 3.3 für das Zwei- und Drei-Raum-Problem definierten Matrizen $\mathbf{T}^{HR}$, $\mathbf{T}^{J}$, $\mathbf{T}^{M}$, $\mathbf{T}^{C}$, $\mathbf{T}^{X}$, $\mathbf{T}^{III}$, $\mathbf{T}^{JII,\mu,\nu}$, $\mathbf{T}^{MII,\mu,\nu}$, $\mathbf{T}^{JIII,\mu,\nu}$ und $\mathbf{T}^{MIII,\mu,\nu}$ sind ihrer Struktur nach gleichartig aufgebaut. Sie unterscheiden sich lediglich in den zugrunde gelegten Basis- und Gewichtsfunktionen. Im rotationssymmetrischen Fall lassen sie sich in vier Untermatrizen aufspalten

$$\mathbf{T}_O = \begin{bmatrix} {}^{tt}\mathbf{T}_O & {}^{t\varphi}\mathbf{T}_O \\ {}^{\varphi t}\mathbf{T}_O & {}^{\varphi\varphi}\mathbf{T}_O \end{bmatrix}. \qquad (6.15)$$

Zunächst soll die Matrix $\mathbf{T}^M$ berechnet werden. Für die Elemente ihrer Untermatrizen gilt:

$$ {}^{\mu\nu}T^{M}_{O\tau\tau'} = \frac{1}{jk} \langle \vec{W}^{\mu}_{\tau}(t,\varphi), \mathrm{rot}\,\mathrm{rot} \iint_F \vec{M}^{\nu}_{\tau'}(t',\varphi') G_0(\rho,\varphi,\rho',\varphi') df' \rangle , $$

mit

$$ \mu, \nu = t, \varphi, \qquad \tau = m N + n, \qquad \tau' = m'N + n', \qquad \begin{matrix} n, n' = 1,2,\ldots N, \\ m, m' = 1,2,\ldots M. \end{matrix} $$

Mit Hilfe der Umformungen aus Abschnitt 3.3.2 läßt sich dafür auch schreiben

$$ \begin{aligned} {}^{\mu\nu}T^{M}_{O\tau\tau'} = \frac{1}{jk} \Big\{ & k^2 \iint_F \iint_F \vec{W}^{\mu}_{\tau}(t,\varphi) \cdot \vec{M}^{\nu}_{\tau'}(t',\varphi') G_0(\rho,\varphi,\rho',\varphi') df' df \\ & - \iint_F \iint_F \mathrm{div}\, \vec{W}^{\mu}_{\tau}(t,\varphi) G_0(\rho,\varphi,\rho',\varphi')\ \mathrm{div}'\, \vec{M}^{\nu}_{\tau'}(t',\varphi') df' df \Big\} . \end{aligned} \tag{6.16} $$

Im ersten Integralausdruck treten Skalarprodukte von Einheitsvektoren auf, für die gilt mit γ nach Abb. 6.2:

$$ \begin{aligned} \vec{u}_t \cdot \vec{u}'_t &= \sin\gamma \sin\gamma' \cos(\varphi'-\varphi) + \cos\gamma \cos\gamma', \\ \vec{u}_\varphi \cdot \vec{u}'_t &= \sin\gamma' \sin(\varphi'-\varphi), \\ \vec{u}_t \cdot \vec{u}'_\varphi &= -\sin\gamma \sin(\varphi'-\varphi), \\ \vec{u}_\varphi \cdot \vec{u}'_\varphi &= \cos(\varphi'-\varphi). \end{aligned} \tag{6.17} $$

Setzt man die Basis- und Gewichtsfunktionen aus Gln. (6.12a) und (6.13a) in Gl. (6.16) ein und berücksichtigt Gln. (6.17), so erhält man mit der Substitution $\varphi'-\varphi = \alpha$

$$ \begin{aligned} {}^{tt}T^{M}_{O\tau\tau'} = \frac{1}{jk} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \int_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} \Big\{ & k^2 D_n D_{n'} \cos(m\varphi) \cos[m'(\alpha+\varphi)] [\sin\gamma\sin\gamma'\cos\alpha + \cos\gamma\cos\gamma'] \\ & - \frac{\partial}{\partial t} D_n \frac{\partial}{\partial t'} D_{n'} \cos(m\varphi) \cos[m'(\alpha+\varphi)] \Big\} G_0(\rho,\rho',\alpha) dt' dt d\alpha d\varphi , \end{aligned} $$

$$
{}^{\varphi t}_{\tau}M_{O\tau\tau'} = \frac{1}{jk}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} \Big\{-k^2 D_n D_{n'} \sin(m\varphi)\cos[m'(\alpha+\varphi)]\sin\gamma'\sin\alpha
$$

$$
+ \frac{m}{\rho} D_n \frac{\partial}{\partial t'} D_{n'} \cos(m\varphi)\cos[m'(\alpha+\varphi)]\Big\} G_0(\rho,\rho',\alpha)\,dt'dt\,d\alpha\,d\varphi,
$$

$$
{}^{t\varphi}_{\tau}M_{O\tau\tau'} = \frac{1}{jk}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} \Big\{k^2 D_n D_{n'} \cos(m\varphi)\,\sin[m'(\alpha+\varphi)]\sin\gamma\sin\alpha \tag{6.18}
$$

$$
+ \frac{\partial}{\partial t} D_n \frac{m'}{\rho'} D_{n'} \cos(m\varphi)\cos[m'(\alpha+\varphi)]\Big\} G_0(\rho,\rho',\alpha)\,dt'dt\,d\alpha\,d\varphi,
$$

$$
{}^{\varphi\varphi}_{\tau}M_{O\tau\tau'} = \frac{1}{jk}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} \Big\{k^2 D_n D_{n'} \sin(m\varphi)\sin[m'(\alpha+\varphi)]\cos\alpha
$$

$$
- \frac{m}{\rho}\frac{m'}{\rho'} D_n D_{n'} \cos(m\varphi)\cos[m'(\alpha+\varphi)]\Big\} G_0(\rho,\rho',\alpha)\,dt'dt\,d\alpha\,d\varphi,
$$

mit

$$
D_n = D(t - t_n),
$$

$$
D_{n'} = D(t' - t_{n'}),
$$

$$
G_0(\rho,\rho',\alpha) = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-jkR}}{R}, \qquad R = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\alpha}.
$$

Die Integration über φ läßt sich geschlossen ausführen, dabei zeigt sich, daß die Matrixelemente mit $m \neq m'$ Null sind und somit die Basisfunktionsentwicklungen unterschiedlicher φ-Periodizitäten getrennt behandelt werden können (vergl. Abschnitt 2.2.3). Bei rotationssymmetrischen Strukturen läßt sich damit die numerische Auswertung von Abstrahlungs- und Beugungsproblemen wesentlich vereinfachen. Da die einfallende Welle in eine Fourierreihe der Art

$$
\sum_{m=0}^{M}\left[a_m \cos(m\varphi) + b_m \sin(m\varphi)\right]
$$

entwickelt werden kann, erlaubt die Basisfunktionsentwicklung nach Gln. (6.12a)

oder (6.12b) mit den zugehörigen Gewichtsfunktionen eine Aufspaltung der Matrix $\mathbf{T}_O^M$ in voneinander unabhängige Teilmatrizen ${}_m\mathbf{T}_O^M$ für die einzelnen m und damit die Zerlegung des Ausgangsproblems in Teilprobleme für die Koeffizienten a_m und b_m. Im folgenden werden nur noch diese Teilmatrizen betrachtet. Für Gln. (6.18) läßt sich dann schreiben:

$$
\begin{aligned}
{}^{tt}_{m}T^{M}_{Onn'} &= \frac{1}{jk}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} \Big[k^2 D_n D_{n'}(\sin\gamma\sin\gamma' G_{2,m} + \cos\gamma\cos\gamma' G_{1,m}) \\
&\qquad - \frac{\partial}{\partial t} D_n \frac{\partial}{\partial t'} D_{n'} G_{1,m}\Big] dt'\,dt, \\
{}^{\varphi t}_{m}T^{M}_{Onn'} &= \frac{1}{jk}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} \Big[k^2 D_n D_{n'} \sin\gamma' G_{3,m} + \frac{m}{\rho} D_n \frac{\partial}{\partial t'} D_{n'} G_{1,m}\Big] dt'\,dt, \\
{}^{t\varphi}_{m}T^{M}_{Onn'} &= \frac{1}{jk}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} \Big[k^2 D_n D_{n'} \sin\gamma G_{3,m} + \frac{\partial}{\partial t} D_n \frac{m}{\rho'} D_{n'} G_{1,m}\Big] dt'\,dt, \\
{}^{\varphi\varphi}_{m}T^{M}_{Onn'} &= \frac{1}{jk}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} \Big[k^2 D_n D_{n'} G_{2,m} + \frac{m^2}{\rho\rho'} D_n D_{n'} G_{1,m}\Big] dt'\,dt.
\end{aligned}
\tag{6.19}
$$

Hierbei wurde abkürzend benutzt

$$G_{1,m} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos(m\alpha)\,\frac{e^{-jkR}}{R}\,d\alpha,$$

$$G_{2,m} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos(m\alpha)\,\cos\alpha\,\frac{e^{-jkR}}{R}\,d\alpha,$$

$$G_{3,m} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin(m\alpha)\,\sin\alpha\,\frac{e^{-jkR}}{R}\,d\alpha.$$

Die Integrale über die Singularitäten liefern dabei endliche Werte [40]. Im Rahmen dieser Arbeit wurde zur Berechnung der $\{G_{i,m};\ i = 1, 2, 3\}$ die Gaußsche Quadraturformel [88] der Ordnung 10 und zur Integration über t und t' die

die Trapezregel mit 4 bis 10 Stützstellen pro Dreiecksfunktion benutzt. Untersuchungen mit verschiedenen Integrationsgenauigkeiten haben gezeigt, daß mit der Erhöhung des Aufwandes bei der Berechnung der Matrixelemente sehr schnell die Maschinenrechenzeit ansteigt, die Auswirkungen auf das Ergebnis jedoch im Vergleich mit möglichen Meßfehlern verschwindend gering sind.

Setzt man die Basisfunktionen aus Gln. (6.12b) für $\vec{J}_\ell$ in Gl. (3.34b) und $\vec{C}_q$ in Gl. (3.43b) ein, so gilt mit den Gewichtsfunktionen nach Gln. (6.13b)

$$\mathbf{T}_O^J = \mathbf{T}_O^C = \mathbf{T}_O^M. \tag{6.20a}$$

Mit $\mathbf{t} = \rho$ und $\mathbf{t}' = \rho'$ erhält man für die Admittanzmatrix des Halbraumes nach Gl. (3.25)

$$\mathbf{T}_O^{HR} = 2\,\mathbf{T}_O^M. \tag{6.20b}$$

Unter Berücksichtigung von Gln. (6.14a) berechnet sich $\mathbf{T}^X$ nach Gl. (3.43d) mit den Basisfunktionen Gln. (6.13b) für $\vec{C}_q$ zu

$$\mathbf{T}_O^X = \begin{bmatrix} t\varphi\mathbf{T}_O^M & tt\mathbf{T}_O^M \\ \varphi\varphi\mathbf{T}_O^M & \varphi t\mathbf{T}_O^M \end{bmatrix}. \tag{6.20c}$$

Die T-Matrizen des Drei-Raum-Problems berechnen sich mit den entsprechenden Basis- und Gewichtsfunktionen nach dem gleichen Prinzip.

6.3.3 S-Matrizen

Die in Abschnitt 3.3 für das Zwei- und Drei-Raum-Problem definierten Matrizen $\mathbf{S}^M$, $\mathbf{S}^J$, $\mathbf{S}^C$, $\mathbf{S}^X$, $\mathbf{S}^{MII,\mu,\nu}$, $\mathbf{S}^{JII,\mu,\nu}$, $\mathbf{S}^{MIII,\mu,\nu}$ und $\mathbf{S}^{JIII,\mu,\nu}$ sind ihrer Struktur nach gleichartig aufgebaut. Sie unterscheiden sich lediglich in den zugrunde gelegten Basis- und Gewichtsfunktionen. Im rotationssymmetrischen Fall lassen sie sich analog zu Gl. (6.15) in vier Untermatrizen aufspalten. Zunächst soll die Matrix $\mathbf{S}_O^M$ berechnet werden. Nach Gl. (6.11) kann man ihre Elemente schreiben als

$$^{\mu\nu}S^M_{O\tau\tau'} = \langle \vec{U}^\mu_\tau(t,\varphi), \tfrac{1}{2}\vec{n} \times \vec{M}^\nu_{\tau'}(t,\varphi) - \iint_F \mathrm{rot}[\vec{M}^\nu_{\tau'}(t',\varphi')G_O(\rho,\varphi,\rho',\varphi')]\,df' \rangle,$$

mit

$$\mu, \nu = t, \varphi, \qquad \tau = mN + n, \qquad \tau' = m'N + n', \qquad n, n' = 1,2,\ldots N, \quad m, m' = 1,2,\ldots M.$$

Setzt man in diese Gleichung die Beziehung

$$\mathrm{rot}[\vec{M}^{\nu}_{\tau'}(t',\varphi')G_0(\rho,\varphi,\rho',\varphi')] = -\frac{1+jkR}{4\pi R^3}\,e^{-jkR}\vec{u}_R \times \vec{M}^{\nu}_{\tau'}(t',\varphi'),$$

mit

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\varphi'-\varphi)},$$

$$\vec{u}_R = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \vec{u}_\rho[\rho-\rho'\cos(\varphi'-\varphi)] - \vec{u}_\varphi\rho'\sin(\varphi'-\varphi) + \vec{u}_z(z-z')$$

ein, so erhält man

$$\mu\nu_c S^{M}_{\tau\tau'} = \frac{1}{2}\iint_F \vec{U}^{\mu}_{\tau}(t,\varphi)\cdot[\vec{n}\times\vec{M}^{\nu}_{\tau'}(t,\varphi)]\,df + \iiint_F\frac{1+jkR}{4\pi R^3}\,e^{-jkR}\vec{U}^{\mu}_{\tau}(t,\varphi)\cdot[\vec{u}_R\times\vec{M}^{\nu}_{\tau'}(t',\varphi')]\,df'df, \tag{6.21}$$

Die Aufpunkte werden dabei durch den Ortsvektor $\vec{r} = \vec{u}_\rho\rho + \vec{u}_z z$ sowie die Tangentenvektoren $\vec{u}_\varphi$ und $\vec{u}_t = \vec{u}_\rho\sin\gamma + \vec{u}_z\cos\gamma$ beschrieben (vergl. Abb. 6.2). Drückt man die Quellpunktkoordinaten im Aufpunktsystem aus, so gilt:

$$\vec{r}' = \vec{u}_\rho\rho'\cos(\varphi'-\varphi) + \vec{u}_\varphi\rho'\sin(\varphi'-\varphi) + \vec{u}_z z',$$

$$\vec{u}'_t = \vec{u}_\rho\sin\gamma'\cos(\varphi'-\varphi) + \vec{u}_\varphi\sin\gamma'\sin(\varphi'-\varphi) + \vec{u}_z\cos\gamma',$$

$$\vec{u}'_\varphi = -\vec{u}_\rho\sin(\varphi'-\varphi) + \vec{u}_\varphi\cos(\varphi'-\varphi).$$

Damit erhält man für die Vektoroperationen im zweiten Integranden von Gl. (6.21):

$$\vec{u}_t\cdot(\vec{u}_R\times\vec{u}'_t) = \sin(\varphi'-\varphi)[\rho\cos\gamma\sin\gamma'-\rho'\sin\gamma\cos\gamma'+(z'-z)\sin\gamma\sin\gamma'],$$

$$\vec{u}_\varphi\cdot(\vec{u}_R\times\vec{u}'_t) = [(\rho'-\rho)\cos\gamma'-(z'-z)\sin\gamma]\cos(\varphi'-\varphi)-2\rho\cos\gamma'\sin^2(\tfrac{\varphi'-\varphi}{2}),$$

$$\vec{u}_t\cdot(\vec{u}_R\times\vec{u}'_\varphi) = \cos(\varphi'-\varphi)[(z'-z)\sin\gamma-(\rho'-\rho)\cos\gamma]-2\rho\cos\gamma\sin^2(\tfrac{\varphi'-\varphi}{2}),$$

$$\vec{u}_\varphi\cdot(\vec{u}_R\times\vec{u}'_\varphi) = (z'-z)\sin(\varphi'-\varphi).$$

Für die Vektoroperationen im ersten Integranden der Gl. (6.21) findet man wegen $\vec{n} = \vec{u}_t \times \vec{u}_\varphi$:

$$\vec{u}_t\cdot(\vec{n}\times\vec{u}_t) = \vec{u}_\varphi\cdot(\vec{n}\times\vec{u}_\varphi) = 0,$$
$$\vec{u}_\varphi\cdot(\vec{n}\times\vec{u}_t) = -\vec{u}_t\cdot(\vec{n}\times\vec{u}_\varphi) = 1. \qquad (6.22)$$

Substituiert man wieder $\varphi'-\varphi = \alpha$ in Gl. (6.21), so läßt sich die Integration über φ geschlossen ausführen. Wie auch in Anhang 6.3.2 ist dann eine Aufspaltung von ${}^{M}_{O}S$ in voneinander unabhängige Teilmatrizen ${}_{m}{}^{M}_{O}S$ möglich, deren Elemente sich zu

$$tt\,{}_{m}{}^{M}_{O}S_{nn'} = \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} D_n D_{n'}[\rho'\sin\gamma\cos\gamma' - \rho\cos\gamma\sin\gamma' - (z'-z)\sin\gamma\sin\gamma']G_{6,m}\,dt'dt,$$

$$\varphi t\,{}_{m}{}^{M}_{O}S_{nn'} = \frac{\pi}{2}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} D_n D_{n=n'}\,dt + \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} D_n D_{n'}\{[(\rho'-\rho)\cos\gamma' - (z'-z)\sin\gamma]G_{5,m} - \rho\cos\gamma' G_{4,m}\}dt'dt, \qquad (6.23)$$

$$t\varphi\,{}_{m}{}^{M}_{O}S_{nn'} = \frac{\pi}{2}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} D_n D_{n=n'}\,dt + \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} D_n D_{n'}\{[(\rho'-\rho)\cos\gamma - (z'-z)\sin\gamma]G_{5,m} + \rho'\cos\gamma G_{4,m}\}dt'dt,$$

$$\varphi\varphi\,{}_{m}{}^{M}_{O}S_{nn'} = -\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} D_n D_{n'}(z'-z)G_{6,m}\,dt'dt,$$

mit

$$G_{4,m} = \frac{1}{4}\int_0^\pi \sin^2\frac{\alpha}{2}\cos(m\alpha)\,\frac{1+jkR}{R^3}\,e^{-jkR}\,d\alpha,$$

$$G_{5,m} = \frac{1}{8}\int_0^\pi \cos\alpha\cos(m\alpha)\,\frac{1-jkR}{R^3}\,e^{-jkR}\,d\alpha,$$

$$G_{6,m} = \frac{1}{8}\int_0^\pi \sin\alpha\sin(m\alpha)\,\frac{1+jkR}{R^3}\,e^{-jkR}\,d\alpha,$$

$$D_n = D(t - t_n), \quad D_{n'} = D(t' - t_{n'}), \quad D_{n=n'} = D(t - t_{n'})$$

berechnen. Gln. (6.23) müssen durch numerische Integration ausgewertet werden. Im

Rahmen dieser Arbeit wurde zur Berechnung der $\{G_{i,m};\ i = 4, 5, 6\}$ die Gaußsche Quadraturformel [88] der Ordnung 10, zur Integration über t und t' die Trapezregel mit 4 bis 10 Stützstellen pro Dreiecksfunktion benutzt.

Mit den Basisfunktionen aus Gln. (6.12b) und den Gewichtsfunktionen aus Gln. (6.13a) erhält man für die Matrizen nach Gln. (3.34c) und (3.43c)

$$\mathbf{S}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{J}} = \mathbf{S}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{C}} = \mathbf{S}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{M}}. \tag{6.24a}$$

Unter Berücksichtigung von Gln. (6.14a) erhält man für $\mathbf{S}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{X}}$ aus Gl. (3.43a)

$$\mathbf{S}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{X}} = \begin{bmatrix} t\varphi\mathbf{S}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{M}} & tt\mathbf{S}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{M}} \\ \varphi\varphi\mathbf{S}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{M}} & \varphi t\mathbf{S}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{M}} \end{bmatrix}. \tag{6.24b}$$

Die S-Matrizen für das Drei-Raum-Problem berechnen sich nach dem gleichen Prinzip.

6.3.4 Admittanzmatrix einer Rundhohlleitung

Die Admittanzmatrix einer Hohlleitung wurde allgemein in Abschnitt 3.3.3 hergeleitet. Benutzt man für die Eigenwellen einer Rundhohlleitung die Ausdrücke nach Gln. (4.10a,b) und setzt als Basis- und Gewichtsfunktionen Gln. (4.7) in Gl. (3.28) ein, so zeigt sich wieder, daß die einzelnen mφ-Abhängigkeiten voneinander entkoppelt sind. $\mathbf{T}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{Hl}}$ kann ebenfalls in Teilmatrizen ${}_{\mathrm{m}}\mathbf{T}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{Hl}}$ aufgespaltet werden. Die Koeffizienten nach Gl. (3.28) berechnen sich zu

$$\begin{aligned}
{}^{\rho}_{\mathrm{m}}A^{\mathrm{H}}_{\mathrm{n'i}} &= \iint_{F_H} \vec{M}^{\rho}_{\mathrm{mn'}}(\rho',\varphi')\cdot[\vec{u}_z \times \vec{e}^{\mathrm{H}}_{\mathrm{mi}}(\rho',\varphi')]\,df' = -\pi\int_{\rho_{n'-1}}^{\rho_{n'+1}} D_{n'}\,k^{\mathrm{H}}_{\rho i}J'_{\mathrm{m}}(k^{\mathrm{H}}_{\rho i}\rho')\,d\rho', \\
{}^{\varphi}_{\mathrm{m}}A^{\mathrm{H}}_{\mathrm{n'i}} &= \iint_{F_H} \vec{M}^{\varphi}_{\mathrm{mn'}}(\rho',\varphi')\cdot[\vec{u}_z \times \vec{e}^{\mathrm{H}}_{\mathrm{mi}}(\rho',\varphi')]\,df' = -\pi\int_{\rho_{n'-1}}^{\rho_{n'+1}} D_{n'}\,\frac{\mathrm{m}}{\rho}J_{\mathrm{m}}(k^{\mathrm{H}}_{\rho i}\rho')\,d\rho', \\
{}^{\rho}_{\mathrm{m}}A^{\mathrm{E}}_{\mathrm{n'i}} &= -\pi\int_{\rho_{n'-1}}^{\rho_{n'+1}} D_{n'}\,\frac{\mathrm{m}}{\rho}J_{\mathrm{m}}(k^{\mathrm{E}}_{\rho i}\rho')\,d\rho',
\end{aligned} \tag{6.25}$$

$$\varphi_m A^E_{n'i} = -\pi \int_{\rho_{n'-1}}^{\rho_{n'+1}} D_{n'} k^E_{\rho i} \, \mathcal{J}'_m(k^E_{\rho i}\rho') d\rho',$$

mit

$$D_{n'} = D(\rho' - \rho_{n'}).$$

Die Integrale müssen dabei zum Teil numerisch ausgewertet werden. Wählt man nach der Methode von Galerkin Basis- und Gewichtsfunktionen gleich, so sind die A_{ni} und B_{ni} in Abschnitt 3.3.3 identisch. Die Elemente der Admittanzmatrix der Rundhohlleitung berechnen sich schließlich nach Gl. (3.29), wobei über eine endliche Zahl von E- und H-Wellen summiert werden muß.

6.3.5 Admittanzmatrizen eines Rundhohlleitungsstückes endlicher Länge

Die Admittanzmatrizen eines Leitungsstückes endlicher Länge sind allgemein in Gl. (3.48c) angegeben. Hier sollen sie für den Fall einer Rundhohlleitung, d. h. für Raum II in Abb. 4.35, spezialisiert werden. Man geht dabei zweckmäßigerweise von einer Entwicklung des transversalen Feldes analog zu Gln. (3.27a,b) aus:

$$\vec{E}_{IItr}(\rho,\varphi,z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \, \vec{e}_i(\rho,\varphi) \, e^{-j\beta_i z} + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \, \vec{e}_i(\rho,\varphi) \, e^{j\beta_i(z+l)}, \qquad (6.26a)$$

$$\vec{H}_{IItr}(\rho,\varphi,z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \, Y_i \, \vec{u}_z \times \vec{e}_i(\rho,\varphi) \, e^{-j\beta_i z} - \sum_{i=1}^{\infty} b_i \, Y_i \, \vec{u}_z \times \vec{e}_i(\rho,\varphi) \, e^{j\beta_i(z+l)}, \qquad (6.26b)$$

mit den $\vec{e}_i$ nach Gln. (4.10a,b), Y_i nach Gln. (4.11a,b) und

$$\beta_i = \begin{cases} \sqrt{k^2 - k^2_{\rho i}} & \text{für } k \geq k_{\rho i} \\ -j\sqrt{k^2_{\rho i} - k^2} & \text{für } k < k_{\rho i}. \end{cases}$$

Aus

$$\vec{M}_1 = -\vec{u}_z \times \vec{E}_{IItr}(\rho,\varphi,z=-l) = -\sum_{i=1}^{\infty} a_i \vec{u}_z \times \vec{e}_i \, e^{j\beta_i l} - \sum_{i=1}^{\infty} b_i \vec{u}_z \times \vec{e}_i,$$

$$\vec{M}_2 = -\vec{u}_z \times \vec{E}_{IItr}(\rho,\varphi,z=0) = -\sum_{i=1}^{\infty} a_i \vec{u}_z \times \vec{e}_i - \sum_{i=1}^{\infty} b_i \vec{u}_z \times \vec{e}_i \; e^{j\beta_i l}$$

erhält man nach Multiplikation mit $-(\vec{u}_z \times \vec{e}_s)$ und Integration über die Querschnittsflächen:

$$-\iint_{F_1} \vec{M}_1 \cdot (\vec{u}_z \times \vec{e}_s) df = a_s \; e^{j\beta_s l} + b_s,$$

$$-\iint_{F_2} \vec{M}_2 \cdot (\vec{u}_z \times \vec{e}_s) df = a_s \qquad + b_s \; e^{j\beta_s l}.$$

Mit Gl. (3.47) können die linken Seiten dieser Beziehungen als Summe über die Basisfunktionen geschrieben werden:

$$-Z_{II} \sum_{q=1}^{Q_1} A_{1,qi} \; V_{1,q} = a_i \; e^{j\beta_i l} + b_i,$$

$$-Z_{II} \sum_{q=1}^{Q_2} A_{2,qi} \; V_{2,q} = a_i \qquad + b_i \; e^{j\beta_i l},$$

wobei die $A_{\nu,qi}$, $\nu = 1, 2$ analog zu Gl. (3.28) definiert sind. Hieraus lassen sich die Entwicklungskoeffizienten in Gl. (6.26a) bestimmen:

$$a_i = \frac{Z_{II}}{1 - e^{j2\beta_i l}} \left(\sum_{q=1}^{Q_1} A_{1,qi} \; V_{1,q} \; e^{j\beta_i l} - \sum_{q=1}^{Q_2} A_{2,qi} \; V_{2,q} \right),$$

$$b_i = \frac{Z_{II}}{1 - e^{j2\beta_i l}} \left(\sum_{q=1}^{Q_2} A_{2,qi} \; V_{2,q} \; e^{j\beta_i l} - \sum_{q=1}^{Q_1} A_{1,qi} \; V_{1,q} \right).$$

Setzt man diese in Gl. (6.26b) ein, berechnet das tangentiale magnetische Feld in den Ebenen $z = 0$ und $z = -l$ und bildet die Inneren Produkte entsprechend Gl. (3.20) mit den Gewichtsfunktionen, die nach der Methode von Galerkin gleich den Basisfunktionen sind, so erhält man für die Matrixelemente:

$$T_{Opq}^{II,1,1} = j\, Z_{II} \sum_{i=1}^{\infty} Y_i \cot(\beta_i l)\, A_{1,pi}\, A_{1,qi},$$

$$T_{Opq}^{II,1,2} = -j\, Z_{II} \sum_{i=1}^{\infty} Y_i \frac{1}{\sin(\beta_i l)}\, A_{1,pi}\, A_{2,qi},$$

$$T_{Opq}^{II,2,1} = j\, Z_{II} \sum_{i=1}^{\infty} Y_i \frac{1}{\sin(\beta_i l)}\, A_{2,pi}\, A_{1,qi},$$

$$T_{Opq}^{II,2,2} = -j\, Z_{II} \sum_{i=1}^{\infty} Y_i \cot(\beta_i l)\, A_{2,pi}\, A_{2,qi}.$$

Die $A_{\mu,pi}$, $A_{\nu,qi}$ berechnen sich nach Gln. (6.25). Bei der numerischen Auswertung kann natürlich nur eine endliche Zahl von Wellentypen berücksichtigt werden.

6.3.6 D-Matrizen

Die in Abschnitt 3.3 für das Zwei- und Drei-Raum-Problem definierten Matrizen $\mathbf{D}^M$ und $\mathbf{D}^J$ sind ihrer Struktur nach gleichartig aufgebaut. Im rotationssymmetrischen Fall lassen sie sich analog zu Gl. (6.15) in vier Untermatrizen aufspalten. Mit den Basisfunktionen nach Gln. (6.12a) und den Gewichtsfunktionen nach Gln. (6.13b) findet man für die Matrixelemente

$$tt\mathbf{D}^M_{m\mathbf{O}nn'} = \varphi\varphi\mathbf{D}^M_{m\mathbf{O}nn'} = 0,$$

$$\varphi t\mathbf{D}^M_{m\mathbf{O}nn'} = t\varphi\mathbf{D}^M_{m\mathbf{O}nn'} = \pi \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} D(t-t_n)\, D(t-t_{n'})\, dt.$$

$D(\xi)$ steht dabei für die Dreiecksfunktion. Die Indizes haben die gleiche Bedeutung wie in den vorangegangenen Abschnitten. Setzt man Basis- und Gewichtsfunktionen aus Gln. (6.12b) und (6.13a) in Gl. (3.34f) ein, so erhält man

$$\mathbf{D}^J_{\mathbf{O}} = \mathbf{D}^M_{\mathbf{O}}.$$

6.3.7 Anregungsvektoren

Nach Gl. (3.22c) berechnen sich die Elemente des Anregungsvektors $\mathbf{I}_O^i$ zu

$$I_{Op}^i = \langle \vec{W}_p, \vec{H}^i \rangle$$

mit $\vec{H}^i$ als magnetische Feldstärke der einfallenden Welle.

a) Kreisblende im ebenen Schirm

Da zur Lösung des Zwei-Raum-Problems mit Hilfe der äquivalenten Anordnung in Abb. 3.1 die Öffnung ideal leitend geschlossen wurde, ist für $\vec{H}^i$ anzusetzen:

$$\vec{H}^i = -2 \frac{E_o}{Z} \vec{u}_x = -2 \frac{E_o}{Z} (\vec{u}_\rho \cos\varphi - \vec{u}_\varphi \sin\varphi).$$

Mit den Gewichtsfunktionen nach Gln. (4.7) ergibt sich bei Aufspaltung des Anregungsvektors

$$\mathbf{I}_O^i = \begin{bmatrix} {}^{\rho}\mathbf{I}_O^i \\ {}^{\varphi}\mathbf{I}_O^i \end{bmatrix}$$

für die einzelnen Elemente

$${}^{\rho}I_{On}^i = -\frac{E_o}{Z} \pi (\rho_{n+1} - \rho_{n-1}),$$

$${}^{\varphi}I_{On}^i = \frac{E_o}{Z} \pi (\rho_{n+1} - \rho_{n-1}).$$

b) Rundhohlleitung mit Hauptwelle

Mit Gl. (4.10a) findet man für die magnetische Feldstärke der H_{11}-Welle in der Öffnungsfläche der Rundhohlleitung

$$\vec{H}^i = 2\, Y_{11}^H\, B_{11}^H\, [-\vec{u}_\rho k_{\rho 1}^H\, J_1'(k_{\rho 1}^H \rho)\cos\varphi + \vec{u}_\varphi \frac{1}{\rho} J_1(k_{\rho 1}^H \rho)\sin\varphi]$$

Wählt man die Gewichtsfunktionen nach Gln. (4.7), so kann man mit den Koeffizienten aus Gln. (6.25) für die Elemente des Anregungsvektors $\mathbf{I}_O^{H1}$ schreiben:

$${}^{\rho}I_{On}^{H1} = 2\, Y_{11}^H\, B_{11}^H\, {}^{\rho}A_{n1}^H,$$

$${}^{\varphi}I_{On}^{H1} = 2\, Y_{11}^H\, B_{11}^H\, {}^{\varphi}A_{n1}^H.$$

6.4 Berechnung der Matrizen für die Behandlung der Rechteckhohlleitung und der rechteckigen Öffnung mit Hilfe der Momentenmethode

Da die numerische Behandlung von Beugungs- und Abstrahlungsproblemen bei nicht rotationssymmetrischen dreidimensionalen Strukturen im allgemeinen mit einem sehr großen Speicherplatz- und Rechenzeitbedarf verbunden ist, beschränken sich die Untersuchungen dieser Arbeit auf Anordnungen, für deren Räume die Greenschen Dyaden analytisch angegeben werden können.

6.4.1 Admittanzmatrix des Halbraumes

Setzt man in Gl. (3.25) die Basis- und Gewichtsfunktionen nach Gln. (4.9) ein, so kann $\mathbf{T}_{\square}^{HR}$ in vier Untermatrizen zerlegt werden:

$$\mathbf{T}_{\square}^{HR} = \begin{bmatrix} xx\mathbf{T}_{\square}^{HR} & xy\mathbf{T}_{\square}^{HR} \\ yx\mathbf{T}_{\square}^{HR} & yy\mathbf{T}_{\square}^{HR} \end{bmatrix}, \tag{6.27}$$

mit

$$\begin{aligned} {}^{\mu\nu}T_{\square pq}^{HR} = \frac{2}{jk}\Bigg\{ k^2 \iint_{F_A} \vec{W}_p^{\mu}(x,y)\Big[\iint_{F_A} \vec{M}_q^{\nu}(x',y')G_0(x,y,x',y')dx'dy'\Big]dx\,dy \\ - \iint_{F_A} \mathrm{div}\vec{W}_p^{\mu}(x,y)\Big[\iint_{F_A} G_0(x,y,x',y')\,\mathrm{div}'\vec{M}_q^{\nu}(x',y')dx'dy'\Big]dx\,dy\Bigg\}, \end{aligned} \tag{6.28}$$

wobei $\mu, \nu = x, y$ zu setzen ist. Die Bildung der Divergenz einer Basisfunktion aus Gln. (4.9) liefert:

$$\mathrm{div}\,\vec{M}_{mn}^{x} = \left[\frac{1}{x_m - x_{m-1}} P(x - x_{m-1}) - \frac{1}{x_{m+1} - x_m} P(x)\right] P(y - y_n),$$

$$\mathrm{div}\,\vec{M}_{mn}^{y} = P(x - x_m)\left[\frac{1}{y_n - y_{n-1}} P(y - y_{n-1}) - \frac{1}{y_{n+1} - y_n} P(y)\right].$$

Die Integrale aus Gl. (6.28) lassen sich mit der Näherungsentwicklung

$$e^{-jkR} \approx e^{-jkR_0}\left[1 - jk(R-R_0) - \frac{k^2}{2}(R-R_0)^2 + \frac{jk^3}{6}(R-R_0)^3\right],$$

wobei

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}, \qquad R_0 = \sqrt{(x_n-x_{n'})^2 + (y_n-y_{n'})^2},$$

geschlossen berechnen [74].

6.4.2 Admittanzmatrix einer Rechteckhohlleitung

Mit den Basis- und Gewichtsfunktionen nach Gln. (4.9) kann $\mathbf{T}_{\square}^{Hl}$ analog zu Gl. (6.27) aufgespaltet werden. Mit den Eigenwellen der Rechteckhohlleitung nach Gln. (4.18a,b) erhält man für die Koeffizienten aus Gl. (3.28):

$$ {}^{\mu}A^{\nu}_{\square mn,i} = \iint_{F_{HQ}} \vec{M}^{\mu}_{mn} \cdot [\vec{u}_z \times \vec{e}^{\nu}_i] \, df', \tag{6.29} $$

wobei $\mu = x, y$ und $\nu = H, E$ zu setzen ist. Die Integrale lassen sich geschlossen berechnen [77].

6.4.3 Anregungsvektoren

Mit den Gewichtsfunktionen nach Gln. (4.9) kann der Anregungsvektor aufgespaltet werden in

$$ \mathbf{I}_{\square}^{i} = \begin{bmatrix} {}^{x}\mathbf{I}_{\square}^{i} \\ {}^{y}\mathbf{I}_{\square}^{i} \end{bmatrix}. $$

a) Rechteckige Blende im ebenen Schirm

Mit der elektrischen Feldstärke der einfallenden Welle nach Gl. (4.2) erhält man:

$$ {}^{x}I^{i}_{\square mn} = -\frac{E_o}{Z} \frac{8\,a\,b}{(N+1)(M+1)}, \quad {}^{y}I^{i}_{\square mn} = 0. $$

b) Rechteckhohlleitung mit Hauptwelle

Mit der elektrischen Feldstärke der einfallenden H_{10}-Welle nach Gl. (4.18a) ergibt sich für die Elemente des Anregungsvektors:

$$ {}^{x}I^{Hl}_{\square mn} = 2\,\gamma^{H}_{10}\,B_{10}\,{}^{x}A^{H}_{mn,10}, \quad {}^{y}I^{Hl}_{\square mn} = 0. $$

7. LITERATURVERZEICHNIS

[1] Knott, E. F., Senior, T. B. A. — Cross Polarization Diagnostics, IEEE Trans. AP 20 (1972), S. 223-224.

[2] Gniss, H., Magura, K., Karg, R., Ermert, H., Brand, H., Boerner, W. M. — Polarization Dependence of Image Fidelity in Microwave Mapping Systems, AP-Symposium Digest (1978), S. 38-41.

[3] Doro, G., Saitto, A. — Dual Polarization for OTS, IEE Conf. Publ. No. 128 (1975), S. 76-82b.

[4] Chu, T. S. — Rain Induced Cross-Polarization at Centimeter and Millimeter Wavelengths, BSTJ 53 (1974), S. 1557-1579.

[5] Dijk, J., van Diepenbeek, C. T. W., Maanders, E. J., Thurlings, L. F. G. — Polarization Losses of Offset Paraboloid Antennas, IEEE Trans. AP 22 (1974), S. 513-520.

[6] Rider, G. C. — Some Orthogonal Polarization Measurements at 23 cm Wavelength, Marconi Review 39 (1976), S. 25-42.

[7] Barton, S. K. — Polarization Distortion in Systems Employing Orthogonal Polarization Frequency Re-Use, Marconi Review 38 (1975), S. 153-168.

[8] Chu, T. S. — Restoring the Orthogonality of Two Polarizations in Radio Communication Systems I, BSTJ 50 (1971), S. 3063-3069.

[9] Chu, T. S. — Restoring the Orthogonality of Two Polarizations in Radio Communication Systems II, BSTJ 52 (1973), S. 319-327.

[10] DiFonzo, D., Williams, A., Tractman, W. — Adaptive Polarization Control for Satellite Frequency Reuse Systems, AP-Symposium Digest (1975), S. 209-212.

[11] Barton, S. K. — Methods of Adaptive Cancellation for Dual Polarization Satellite Systems, Marconi Review 39 (1976), S. 1-24.

[12] - — IEEE Standard Definitions of Terms for Antennas, IEEE Trans. AP 17 (1969), S. 262-269.

[13] Deschamps, G. A. — Part II - Geometrical Representation of the Polarization of a Plane Electromagnetic Wave, Proc. IRE 39 (1951), S. 540-544.

[14] Ludwig, A. C. — The Definition of Cross Polarization IEEE Trans. AP 21 (1973), S. 116-119.

[15] Koffman, I. — Feed Polarization for Parallel Currents in Reflectors Generated by Conic Sections, IEEE Trans. AP 14 (1966), S. 37-40.

[16] Kühn, R. — Mikrowellenantennen, VEB Verlag Technik Berlin (1964).

[17] Clarricoats, P. J. B., Saha, P. K. — Propagation and Radiation Behaviour of Corrugated Feeds Part 1 - Corrugated-Waveguide Feed, Proc. IEE 118 (1971), S. 1167-1176.

[18] Parini, C. G., Clarricoats, P. J. B., Olver, A. D. — Crosspolar Radiation from Open-Ended Corrugated Waveguides, Electron. Lett. 11 (1975), S. 567-577.

[19] Magnus, W., Oberhettinger, F., Soni, R. P. — Formulas and Theorems for Special Functions of Mathematical Physics, Springer Verlag (1966), 3. Auflage.

[20] Schneemann, J. — Beitrag zur Theorie der Abstrahlung elektromagnetischer Wellen aus Hohlleitern mit Anwendungsbeispielen, Fortschr.-Ber. VDI-Z. Reihe 9 Nr. 21 (1979).

[21] Mittra, R., Lee, S. W. — Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves, Macmillan Comp. (1971).

[22] Maruvitz, N. — Waveguide Handbook, McGraw-Hill (1951).

[23] Narasimhan, M. S. — GTD Analysis of the Radiation Patterns of Open-Ended Circular Cylindrical Waveguide Horns, IEEE Trans. AP 27 (1979), S. 438-441.

[24] Butler, C. M., Rahmat-Samii, Y., Mittra, R. — Electromagnetic Penetration Through Apertures in Conducting Surfaces, IEEE Trans. AP 26 (1978), S. 82-93.

[25] Rubinowicz, A. — Die Beugungswelle in der Kirchhoffschen Theorie der Beugung, Springer Verlag (1966).

[26] Kirchhoff, G. — Zur Theorie der Lichtstrahlen, Annalen der Physik 18 (1883), S. 663-695.

[27] Rayleigh — Theory of Sound.

[28] Sommerfeld, A. — Die frei schwingende Kolbenmembran, Annalen der Physik, 5. Folge 42 (1942/43), S. 389-420.

[29] Kottler, F. — Elektromagnetische Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen, Annalen der Physik 4. Folge 71 (1923), S. 457-508.

[30] Severin, H. — Lichtoptische Methoden zur Berechnung der Beugungserscheinungen im Bereich der Zentimeterwellen, Techn. Mitteil. PTT (1952).

[31] Franz, W. — Zur Formulierung des Huygensschen Prinzips, Zeitschr. für Naturforschung 3a (1948), S. 500-506.

[32] Severin, H. — Zur Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen, Zeitschr. für Physik 129 (1951), S. 426-439.

[33] Chu, L. J.
Calculation of the Radiation Properties of Hollow Pipes and Horns,
Journ. of Appl. Phys. 11 (1940), S. 603-610.

[34] Koch, G. F., Dombek, K.-P.
Einfluß der Aperturreflexion auf die Berechnung der Richtcharakteristiken von Hohlleiterstrahlern,
AEÜ 23 (1969), S. 553-560.

[35] Adatia, N. A., Rudge, A. W., Parini, C.
Mathematical Modelling of the Radiation Fields from Microwave Primary-Feed Antennas,
7th EuMC Conf. Proc. (1977), S.329-333.

[36] Severin, H.
Beugung elektromagnetischer Zentimeterwellen an metallischen Blenden,
Zeitschr. für Naturforschung 1 (1946), S.487-495.

[37] Buchsbaum, S. J., Milne, A. R., Hogg, D. C., Bekefi, G., Woonton, G. A.
Microwave Diffraction by Apertures of Various Shapes,
Journ. Appl. Phys. 26 (1955), S. 706-715.

[38] Harrington, R. F., Mautz, J. R.
A Generalized Network Formulation for Aperture Problems,
IEEE Trans. AP 24 (1976), S. 870-873.

[39] Harrington, R. F.
Field Computation by Moment Methods,
Macmillan Comp. (1968).

[40] Mautz, J. R., Harrington, R. F.
Radiation and Scattering from Bodies of Revolution,
Appl. Scient. Res. (1969), S. 405-435.

[41] Hansen, J. E., Shafai, L.
Crosspolarized Radiation from Waveguides and Narrow-Angle Horns,
Electron. Lett. 13 (1977), S. 313-315.

[42] James, G. L., Greene, K. J.
Effect of Wall Thickness on Radiation from Circular Waveguides,
Electron. Lett. 14 (1978), S. 90-91.

[43] Mittra, R., Herausg. — Computer Techniques for Electromagnetics, Pergamon Press (1973).

[44] Morita, N. — Surface Integral Representations for Electromagnetic Scattering from Dielectric Cylinders, IEEE Trans. AP 26 (1978), S. 261-266.

[45] Mautz, J. R., Harrington, R. F. — A Combined-Source Solution for Radiation and Scattering from a Perfectly·Conducting Body, IEEE Trans. AP 27 (1979), S. 445-454.

[46] Mautz, J. R., Harrington, R. F. — H-Field, E-Field, and Combined Field Solution for Conducting Bodies of Revolution, AEÜ 32 (1978), S. 157-164.

[47] Yaghjian, A. D. — Augmented Electric- and Magnetic-Field Integral Equations which Eliminate the Spurious Resonances, Intern. URSI-Symposium 1980 on Electrom. Waves, S. 121 B/1-4.

[48] Maue, A.-W. — Zur Formulierung eines allgemeinen Beugungsproblems durch eine Integralgleichung, Zeitschr. für Physik 126 (1949), S. 601-618.

[49] Olver, A. D., Clarricoats, P. J. B., Hockham, G. A., Parini, C. G. — Design of Corrugated Feeds for Low Cross Polarisation, IEE Conf. Publ. 169 (1978), S. 355-359.

[50] Elliot, R. D. Hockham, G. A. — Optimised Design of Choked Waveguide Feeds, IEE Conf. Publ. 169 (1978), S. 369-372.

[51] Geyer, H. — Runder Hornstrahler mit ringförmigen Sperrtöpfen zur gleichzeitigen Übertragung zweier polarisationsentkoppelter Wellen, Frequenz 20 (1966), S. 22-28.

[52] James, G. L. — Radiation Properties of 90° Conical Horns, Electron. Lett. 13 (1977), S. 293-294.

[53] Cowan, J. H. — Dual-Band Reflector-Feed Element for Frequency-Reuse Applications, Electron. Lett. 9 (1973), S. 596-597.

[54] Koch, G. F., Lochner, O., Scheffer, H., Wohlleben, R. — Untersuchungen am Radioteleskop in Effelsberg mit neuen Primärfokuserregern, NTZ 28 (1975), S. 41-46.

[55] Hockham, G. A. — Investigation of a 90^{o} Corrugated Horn, Electron. Lett. 12 (1976), S. 199-201.

[56] Kumar, A. — Waveguide Feed Reduces Cross Polarization Levels, Microwave Journ. 21 (1978), No. 3, S. 86-87.

[57] Thust, P. — Hornstrahler mit sektorähnlichem Richtdiagramm für die gleichzeitige Übertragung zweier polarisationsentkoppelter Wellen, Frequenz 20 (1966), S. 148-155.

[58] Ghobrial, S. I. — Some Data for the Design of Low-Crosspolarisation Feeds, Electron. Lett. 9 (1973), S.465-466.

[59] Hristov, H. D., Kirov, N. M. — Cross Polarization Characteristics of Cassegrain Confocal Paraboloidal Antenna with Dielectric Rod, 9^{th} EuMC Conf. Proc. (1979), S. 201-203.

[60] Rudge, A. W., Philippou, G. Y., Williams, N. — Low Cross-Polar Waveguide Horns for Multiple-Feed Reflector Antennas, IEE Conf. Publ. 169 (1978), S. 360-363.

[61] Jacobsen, J. — On the Cross Polarization of Asymmetric Reflector Antennas for Satellite Applications, IEEE Trans. AP 25 (1977), S. 276-283.

[62] Potter, P. D. — A New Horn Antenna with Suppressed Sidelobes and Equal Beamwidths, Microwave Journ. 6 (1963), No. 6, S. 71-78.

[63] Watson, B. K., Rudge, A. W., Adatia, N. A.
Dual Polarized Mode Generator for Cross-Polar Compensation in Offset Parabolic Reflector Antennas, 8th EuMC Conf. Proc. (1978), S. 183-187.

[64] Kumar, A., Hockham, G. A.
Dielectric-Ring-Loaded Waveguide Feed, Electron. Lett. 13 (1977), S. 436-437.

[65] Satoh, T.
Cross-Polarization Characteristics of a Dielectric-Loaded Horn Antenna, Electronics and Communications in Japan 57-B (1974), No. 10, S. 81-88.

[66] Rudge, A. W., Adatia, N. A.
A New Class of Primary-Feed Antennas for Use with Offset Parabolic-Reflector Antennas, Electron. Lett. 11 (1975), S. 597-599.

[67] Schwerdtfeger, R.
A Coaxial Dual Mode Feed System, 9th EuMC Conf. Proc. (1979), S. 196-200.

[68] Anders, R.
Criteria for the Choice of Optimal Basis Functions, IEE Conf. Publ. 169 (1978), S. 170-173.

[69] Mittra, R.
Numerical and Asymptotic Techniques in Electromagnetics, Springer Verlag (1975).

[70] Meixner, J., Andrejewski, W.
Strenge Theorie der Beugung ebener elektromagnetischer Wellen an der vollkommen leitenden Kreisscheibe und an der kreisförmigen Öffnung im vollkommen leitenden ebenen Schirm, Annalen der Physik 6. Folge 7 (1950), S. 157-168.

[71] Andrejewski, W.
Strenge Theorie der Beugung ebener elektromagnetischer Wellen an der vollkommen leitenden Kreisscheibe und an der kreisförmigen Öffnung im vollkommen leitenden Schirm. Numerische Ergebnisse, Die Naturwissenschaften 38 (1951), S.406-407.

[72] Andrejewski, W. — Die Beugung elektromagnetischer Wellen an der leitenden Kreisscheibe und der kreisförmigen Öffnung im leitenden ebenen Schirm, Zeitschr. für angew. Physik 5 (1953), S.178-186

[73] Wilkinson, J. H. — Rundungsfehler, Heidelberger Taschenbücher Band 44, Springer Verlag (1969).

[74] Mautz, J. R., Harrington, R. F. — Electromagnetic Transmission through a Rectangular Aperture in a Perfectly Conducting Plan Techn. Rep. AFCRL-TR-76-0056 (1976).

[75] Mishustin, B. A. — Radiation from the Aperture of a Circular Waveguide with Infinite Flange, Soviet Radiophysics 8 (1965), S. 852-858.

[76] Johansen, E. L. — Surface Wave Radiation from a Thick, Semi-Infinite Plane with a Reactive Surface, IEEE Trans. AP 16 (1968), S. 391-404.

[77] Mautz, J. R., Harrington, R. F. — Transmission from a Rectangular Waveguide into Half Space through a Rectangular Aperture, Techn. Rep. RADC-TR-76-264 (1976).

[78] Cole, W. J., Nagelberg, E. R., Nagel, C. M. — Iterative Solution of Waveguide Discontinuity Problems, BSTJ 46 (1967), S. 649-672.

[79] Merboth, M. — Rechnerische und experimentelle Untersuchung eines kreuzpolarisationsarmen Hohlleitungserregers mit zwei Wellentypen, Dipl. Arb. aus dem Inst. für Hoch- und Höchstfrequenztechnik der Ruhr-Universität Bochum (1980).

[80] Chatterjee, J. S., Croswell, W. F. — Waveguide Excited Dielectric Spheres as Feeds, IEEE Trans. AP 20 (1972), S. 206-208.

[81] Neelakantaswamy, P. S., Banerjee, D. K. — Radiation Characteristics of a Dielectric Sphere-Loaded Corrugated Pipe, IEEE Trans. AP 23 (1975), S. 728-730.

[82] Dombek, K.-P. Dielektrische Antennen geringer Querabmessungen als Erreger für Spiegelantennen, NTZ 28 (1975), S. 311-315.

[83] Dombek, K.-P. Dielektrische Antennen nichtzylindrischer Form, NTZ 26 (1973), S. 529-535.

[84] Mück, G. Eine L-Band-Radaranlage zur Streckenkontrolle in der Flugsicherung, Nachrichten Elektronik 32 (1978), S. 357-360.

[85] Dombek, K.-P. Über den Näherungscharakter Kirchhoffscher Randwerte für Nahfeldberechnungen, NTZ 26 (1973), S. 165-170.

[86] Silver, S. Microwave Antenna Theory and Design, McGraw-Hill (1949).

[87] Davis, W. A. Numerical Solutions to the Problems of Electromagnetic Radiation and Scattering by a Finite Hollow Cylinder, Interaction Notes 261 (1975).

[88] Krylov, V. I. Approximate Calculation of Integrals, Macmillan Co. (1962).

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1977 bis 1980 am Institut für Hoch- und Höchstfrequenztechnik der Ruhr-Universität Bochum. Herrn Prof. Dr. Hans Severin gilt mein besonderer Dank für die Anregung zu dieser Arbeit, für sein stetes Interesse an dem Fortgang der Untersuchungen und wertvolle Diskussionen und Hinweise.

Die numerische Berechnungen dieser Arbeit wurden am Rechenzentrum der Ruhr-Universität durchgeführt.

Lebenslauf

Personalien

Name	*Volker Hombach*
Geburtsdatum, Geburtsort	*26.07.49, Freudenberg Krs. Siegen*
Familienstand	*verheiratet seit dem 9.06.1978, ein Kind*

Schulausbildung

1956 - 1960	*Volksschule Freudenberg*
1960 - 1966	*Realschule Siegen, Abschluß: Mittlere Reife*
1966 - 1968	*Aufbauzweig des Fürst-Johann-Moritz-Gymnasiums der Stadt Hüttental*
20.5.1968	*Reifeprüfung*

Wehrdienst

1968 -1970	*Zeitsoldat für zwei Jahre bei einer Fernmeldeeinheit, Lt. d. Res.*

Hochschulausbildung

WS 1970/71 - SS 1975	*Studium der Elektrotechnik/ allgemeine Elektrotechnik an der RWTH Aachen*
10.6.1975	*Hauptdiplom*
seit WS 1977/78	*Studium der Wirtschaftswissenschaften an der Fernuniversität Hagen als Teilzeitstudent*

Berufstätigkeit

seit 1.10.1975	*Wissenschaftlicher Assistent am Institut für Hoch- und Höchstfrequenztechnik der Ruhr-Universität Bochum*

Druck und Verarbeitung: copy shop, darmstadt, tel. 21353